

ANALİZ

Babamın Anısına , Aileme ...

ve Cengiz Hocam'a ...

Erhan GÜLER

- I. BÖLÜM -

Seriler Hakkında Genel Bilgiler

Seriye geçmeden önce diziyi hatırlayalım.

1.1. DİZİLER

TANIM 1.1.1.

E boş olmayan bir küme ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow E$$

$$n \longrightarrow a(n) = a_n$$

fonksiyonuna bir dizi denir. Bu dizi $(a_n), (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ simgelerden biriyle gösterilir.

Örnek 1.1.1. $(a_n) = (n^2)$ dizisinin ilk dört terimini yazınız. $n \in \mathbb{N}^+$

Çözüm // $(n^2) = (1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots)$

Tanım 1.1.1. 'de $E = \mathbb{R}$ alınırsa, diziyi gerçel sayı dizisi denir.

TANIM 1.1.2.

(a_n) ve (b_n) iki dizi ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu dizilerin toplamı, farkı, çarpımını ve $b \neq 0$ olmak üzere bölümünü sırasıyla

i- $(a_n) \mp (b_n) = (a_n \mp b_n)$

ii- $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$

iii- $\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$

iv- $c \cdot (a_n) = (c \cdot a_n)$ olarak tanımlanır.

Örnek 1.1.2. $(a_n) = \left(\frac{1}{n} \right)$ $c = 5$

$$c(a_n) = 5 \cdot \left(\frac{1}{n} \right) = 5 \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right)$$

$$= (5 \cdot 1, 5 \cdot \frac{1}{2}, \dots, 5 \cdot \frac{1}{n}, \dots)$$

TANIM 1.1.3.

Bir (a_n) dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için,

- i- $a_n < a_{n+1}$ ise (a_n) dizisine monoton artan ya da artan dizi,
- ii- $a_{n+1} < a_n$ ise (a_n) dizisine azalan "azalan",
- iii- $a_n \leq a_{n+1}$ ise (a_n) dizisine azalmayan dizi
- iv- $a_{n+1} \leq a_n$ ise (a_n) dizisine artmayan dizi denir.

Örnek 1.1.3. $(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots)$ artmayan dizi.

Örnek 1.1.4. $(\frac{1}{n})$ dizisini araştırınız.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1 \text{ azalandır.}$$

$A \subset \mathbb{R}$ olsun. $\forall x \in A$ için $|x| < M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa A kümesi sınırlıdır denir.

Bir (a_n) dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n \leq M$ olacak biçimde bir M gerçel sayısı varsa (a_n) dizisi üstten sınırlıdır denir.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $m \leq a_n$ olacak biçimde bir m gerçel sayısı varsa (a_n) dizisi alttan sınırlıdır denir.

M 'ye dizinin bir üst sınırı, m 'ye dizinin bir alt sınırı denir.

Dizi, hem alttan, hem üstten sınırlı ise sınırlı dizi denir.

$(\frac{1}{n^2})$ dizisi sınırlı bir dizi midir? $n \in \mathbb{N}^+$

$(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots)$ dizinin tüm elemanları $[0, 1]$ aralığında olduğundan verilen dizi sınırlıdır.

TANIM 1.1.4.

Bir (a_n) dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için

1- $a_{n+1} - a_n = k$ ise diziye aritmetik dizi,

$(k > 0$ ise artan, $k < 0$ ise azalan) $k =$ ortak fark

2- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$ ise diziye geometrik dizi,

$(k > 1$ ise artan, $k < 1$ ise azalan) $k =$ ortak çarpan

Aritmetik ve geometrik diziye en genel örnekler sırasıyla

$(a, a+k, a+2k, a+3k, \dots, a+(n-1)k, \dots)$

$$(a, ak, ak^2, ak^3, \dots, ak^{n-1}, \dots)$$

$$(1, 5, 9, 13, \dots, 1 + (n-1)4, \dots)$$

$$(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^{n-1}}, \dots) \quad k = \frac{1}{3}$$

TANIM 1.1.5.

(i) (a_n) üstten sınırlı bir dizi olsun. (a_n) 'nin üst sınırlarının en küçüğüne, en küçük üst sınır denir ve $Eküs(a_n)$ ile gösterilir.

(ii) (a_n) alttan sınırlı bir dizi olsun. (a_n) 'nin alt sınırlarının en büyüğüne, en büyük alt sınır denir ve $EBAS(a_n)$ ile gösterilir.

$$EBAS = \infimum \quad Eküs = \supremum$$

Alıştırırmalar

I- Aşağıdaki dizilerin eğer varsa EBAS ve Eküs'lerini bulun.

a) (n)

b) $(-n)$

c) $(\frac{1}{n})$

d) $(\frac{(-1)^n}{n})$

II- a) (ak^{n-1}) dizisinin ilk n terim toplamının

a. $\frac{1-k^n}{1-k}$ olduğunu,

b) (n) dizisinin ilk n terim toplamının $\frac{n(n+1)}{2}$ olduğunu,

c) $(2n-1)$ dizisinin ilk n terim toplamının n^2 olduğunu,

d) n^2 dizisinin ilk n terim toplamının $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ olduğunu,

e) n^3 dizisinin ilk n terim toplamının $(\frac{n(n+1)}{2})^2$ olduğunu gösteriniz.

Çözümler :

I- a) $(n) = (1, 2, 3, \dots, n, \dots) \quad n \in \mathbb{N} \quad EBAS = 1$

b) $(-n) = (\dots, -1, -2, -3, -4, \dots) \quad Eküs = -1$

c) $(\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots) \quad [\frac{1}{2}, 1]$ aralığındadır.

d) $(\frac{(-1)^n}{n}) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots)$

Bu dizinin elemanları $[-1, \frac{1}{2}]$ aralığındadır.

II- İspatı tümevarımla yapalım.

a) $(ak^{n-1}) = (a, ak, ak^2, \dots, ak^{n-1}, \dots)$

$n=1$ için doğrudur

$n=m$ için doğru olduğunu varsayalım.

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{m-1} = a \cdot \frac{1-k^m}{1-k}$$

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{m-1} + ak^m = a \cdot \frac{1-k^m}{1-k} + ak^m$$

$$= \frac{a - ak^m + ak^m - ak^{m+1}}{1-k}$$

$$= a \cdot \frac{1-k^{m+1}}{1-k} \quad m+1 \in \mathbb{D} //$$

b) $(n) = (1, 2, 3, \dots, n, \dots)$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n \stackrel{?}{=} \frac{n(n+1)}{2}$$

$n=1$ için doğrudur.

$n=m$ için $\frac{n(n+1)}{2}$ doğru kabul edelim.

$$1 + 2 + 3 + \dots + m + m+1 = \frac{m(m+1)}{2} + m+1$$

$$= \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad m+1 \in \mathbb{D} //$$

c) $(2n-1) = (1+3+5+\dots+2n-1+\dots)$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 \stackrel{?}{=} n^2$$

$n=1$ için $1=1$ doğrudur.

$n=m$ için $1+3+5+\dots+2m-1 = m^2$ olsun.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2m-1 + 2m+1 = m^2 + 2m+1 = (m+1)^2$$

$m+1$ için verilen önerme doğru olduğundan tüm önerme doğrudur.

1.2. DİZİNİN LİMİTİ

Bir (a_n) dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için

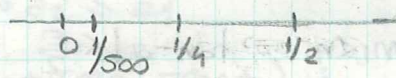
$m < n \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ olacak biçimde bir

$\varepsilon > 0$ sayısı varsa (a_n) dizisinin limiti a 'dır.

Ya da (a_n) dizisi $a \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsar denir ve

$\lim(a_n) = a$ ya da $n \rightarrow \infty$ iken $a_n \rightarrow a$ yazılır.

$$\varepsilon = \frac{1}{500} \text{ olsun.}$$



$n \rightarrow \infty$ iken $500 < n$ için dizinin elemanları ile sıfır arasındaki fark $1/500$ den küçüktür. $m=500$ dır.

Örnek 1.2.1. $(\frac{1}{n})$ dizisinin limitinin sıfır olduğunu gösteriniz.

$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sıfırdan çok yakın bir sayı ve $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ yazabiliriz.

$m = \frac{1}{\varepsilon}$ alınırsa, m den büyük n 'ler için,

$$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \text{ koşulu sağlanır.}$$

$\varepsilon = \frac{3}{500}$ olsun. $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{500}{3}$ doğal sayı değildir. O halde ona yakın olan doğal sayıyı alırız.

Bir (a_n) dizisinin yakınsak alt dizilerinin limitleri sonlu sayıda ise bunların en küçüğüne dizinin alt limiti, en büyüğüne de dizinin üst limiti denir.

$$\text{alt limit : } \underline{\lim}, \quad \text{üst limit : } \overline{\lim}$$

alt limit : limit inferior, üst limit : limit superior

$$\underline{\lim}(a_n) = \lim \inf(a_n), \quad \overline{\lim}(a_n) = \lim \sup(a_n)$$

TANIM 1.2.2.

Limiti var olan (a_n) dizisinin, bir ve yalnız bir limiti varsa bu diziye yakınsak dizi denir. Yakınsak olmayan diziye de iraksak dizi denir.

(a_n) dizisinin yakınsak olması için alt ve üst limitleri eşit olmalıdır.

$$\underline{\lim}(a_n) = \overline{\lim}(a_n) \Leftrightarrow \text{yakınsak}(a_n)$$

Teorem 1.2.1. $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $r \in \mathbb{R}$ ise

$$i) \quad a_n \mp b_n \rightarrow a \mp b$$

$$ii) \quad r a_n \rightarrow r a$$

$$iii) \quad a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$$

$$iv) \quad \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b} \quad b \neq 0$$

$$v) \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad b \neq 0$$

İspat, i) $a_n \rightarrow a$ demek, $m_1 < n \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde

$m_1 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı var demektir.

$b_n \rightarrow b$ olması demek, $m_2 < n \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

$\max(m_1, m_2) = m$ olsun.

$m < n \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Demek ki,

$$m < n \Rightarrow |a_n + b_n - (a + b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$$

$n \rightarrow \infty$ iken $a_n + b_n \rightarrow a + b$

İspat ii) $a_n \rightarrow a \Rightarrow r a_n \rightarrow r a$ dir. ?

$a_n \rightarrow a$ olması demek,

$m < n \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|r|}$ olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ sayısı var demektir.

$$|r a_n - r a| < \varepsilon ?$$

$$m < n \Rightarrow |r a_n - r a| = |r(a_n - a)| = |r| |a_n - a| < |r| \frac{\varepsilon}{|r|}$$

$$\Rightarrow |r a_n - r a| < \varepsilon$$

$n \rightarrow \infty$ iken $r a_n \rightarrow r a$

Teorem 1.2.2. Azalmayan (artmayan) bir (a_n) dizisi üstten (alttan)

sınırlı ise limiti vardır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{EKÜS}(a_n), \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{ERAS}(a_n) \right) \text{ dir.}$$

İspat,, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$ dizisi üstten sınırlı olduğundan

a_n dizisinin EKÜS'ü vardır. EKÜS $(a_n) = a$ olsun.

Bu durumda, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ dir. Neden?

$\varepsilon > 0$ olmak üzere $a - \varepsilon < a$ dir. Eğer, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a - \varepsilon$ olsaydı,

EKÜS $(a_n) = a - \varepsilon$ olurdu.

Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a + \varepsilon$ olsaydı, EKÜS $(a_n) = a + \varepsilon$ olurdu.

$$\Rightarrow m < n \Rightarrow a_n - a < \varepsilon$$

Teoremler 1.2.3. (Karşılaştırma Testi) :

$a_n \leq a_{n+1}$, $b_n \leq b_{n+1}$ ve $a_n \leq b_n$ olacak biçimde (a_n) ve (b_n) dizileri verilsin. (b_n) yakınsak ise (a_n) de yakınsaktır.

İspat // (b_n) dizisi yakınsak olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ dir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq b_n$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Rightarrow (a_n) \text{ dizisi sınırlıdır. (yakınsak)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$a_{n+1} \leq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$ ve $a_n \leq b_n$ olacak biçimde (a_n) ve (b_n) dizileri verilmiş olsun. Eğer (a_n) yakınsak ise (b_n) de yakınsaktır. (Azalan bir dizi alttan sınırlı ise yakınsaktır.)

(İkisi de artan (azalan) dizi varsa; küşüşü yakınsak ise büyüğü de yakınsaktır.)

TANIM 1.2.3

(a_n) bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\exists N_\varepsilon < m, n \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa, a_n dizisine CAUCHY dizisi denir.

• $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ $\varepsilon = \frac{1}{500}$ $m = 510$ $n = 520$

$$a_m = \frac{1}{510} \quad a_n = \frac{1}{520} \quad \left| \frac{1}{510} - \frac{1}{520} \right| < \frac{1}{500}$$

• $\varepsilon = \frac{3}{500}$ $N_\varepsilon = ?$

$$N_\varepsilon = 167 \quad m = 167 \quad n = 500 \quad a_m - a_n < \varepsilon \text{ olmalıdır.}$$

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{1}{167} - \frac{1}{500} \right| < \frac{3}{500}$$

SORU // Yakınsak her dizi Cauchy dizisidir. Kanıtlayınız.

Çözüm // (a_n) yakınsak olsun.

$$m_1 < n \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ olacak biçimde bir } m_1 \text{ doğal sayısı var.}$$

$$m_2 < n \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ olacak biçimde bir } m_2 \text{ doğal sayısı var.}$$

$$\max(m_1, m_2) = N_\varepsilon \text{ olsun.}$$

$$|a_m - a_n| = |a_m - a - a_n + a| = |(a_m - a) + (a_n - a)| \leq \underbrace{|a_m - a|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon < m, n \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon < m, n \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon \Rightarrow \text{yakınsak her dizi cauchy dizisidir.}$$

Aştırmalar

1- Aşağıdaki dizilerin limitlerini bulunuz.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{2n+5} \right)^3$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+3n}{5n^2+2n-1}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3+1}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+3+\dots+2n-1}$

2- $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$

3- $a_n \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n^2 - 3a_n + 1) = ?$

4- $a_n \rightarrow 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3 - 3a_n^2 - 2}{4a_n^2 + 4a_n + 1} = ?$

5- $(a_n) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \dots, a_n, \dots)$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

6- $a_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$

7- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ dir. Kanıtlayınız.

8- Aşağıdaki dizilerin monoton artan ya da monoton azalan olup olmadıklarını araştırınız.

a- $(a_n) = \frac{1}{n!}$

b- $(a_n) = \log\left(\frac{3}{4}\right)^n$

c- $(a_n) = \frac{1}{n(n+1)}$

9- Aşağıdaki dizilerin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

a) $(a_n) = \left(\frac{(-1)^n \cdot n}{2n+1} \right)$

b) $(a_n) = (-1)^n$

c) $(a_n) = \frac{1}{3^n - n}$

Çözümler :

11.10.94
SALI

3- $a_n \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{1-3+2}{2} = 0 //$

4- $a_n \rightarrow 2 \Rightarrow \frac{8-12-2}{16+8+1} = -\frac{6}{25} //$

5- $a_1 = 1, a_2 = \sqrt{2}, a_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}, \dots, a_n = ?$

405

$n=1 \Rightarrow a_1 = 1$

$n > 1 \Rightarrow a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}, n \in \mathbb{N}^+$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olduğunu varsayalım.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = a$ dir.

$a = \sqrt{1+a} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 //$

6- $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 //$

7- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ dir. ?

$m < n \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı var.

$||x| - |y|| \leq |x - y|$ idi.

$m < n \Rightarrow ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow m < n \Rightarrow ||a_n| - |a|| < \varepsilon$ olacak şekilde m sayısı vardır.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

8- a) $a_{n+1} - a_n = ?$

$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

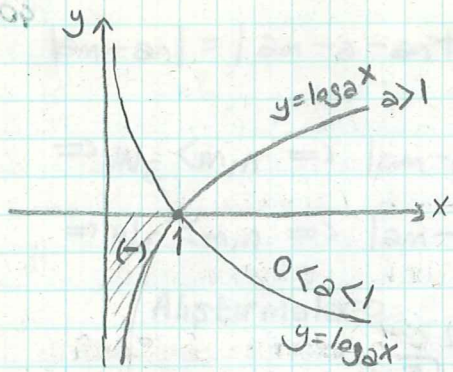
$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ o halde artandır.

b) $a_{n+1} - a_n = \log\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - \log\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= (n+1) \log\left(\frac{3}{4}\right) - n \log\left(\frac{3}{4}\right) = \log\frac{3}{4} < 0$

o halde azalan bir dizedir.



$$a > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\log 1 = 0$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$$

SORU // Genel terimi $a_n = (-1)^n$ olan dizinin yakınsak veya ıraksak olduğunu araştırınız.

$n = 2k$ ise (bu dizinin iki alt dizisi vardır.)

$$(a_n) = (a_{2k}) = (1, 1, 1, \dots)$$

$n = 2k-1$ ise $(a_n) = (a_{2k-1}) = (-1, -1, -1, \dots)$ (bir tane alt dizisi vardır.)

$\lim (a_n) = -1$, $\overline{\lim} (a_n) = 1 \Rightarrow \lim (a_n) \neq \overline{\lim} (a_n)$ olduğundan yakınsak değildir.

SORU // $(a_n) = \left(\frac{(-1)^n n}{10n+1} \right)$

$$n = 2k \text{ ise } (a_n) = (a_{2k}) = \left(\frac{2k}{20k+1} \right)$$

$$n = 2k-1 \text{ ise } (a_n) = (a_{2k-1}) = \left(\frac{-2k+1}{20k-9} \right)$$

$$\overline{\lim} (a_n) = \frac{1}{10} \quad \lim (a_n) = -\frac{1}{10} \quad \text{yakınsak değildir.}$$

SORU // $(a_n) = \left(\frac{1}{3^n - n} \right)$ yakınsak mıdır?

$$(b_n) = \left(\frac{1}{3^n} \right) \text{ olsun. } (a_n) \geq (b_n)$$

$$b_{n+1} \leq b_n, \quad a_{n+1} \leq a_n$$

$$3^{n+1} - (n+1) > 3^n - n, \quad n > 1$$

$$\Rightarrow 3^n \cdot 3 - 3^n > 0$$

$$\Rightarrow 3^n (3-1) > 1 \Rightarrow 3^{n+1} > 3^n + 1$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} - 1 > 3^n \Rightarrow 3^{n+1} - n - 1 > 3^n - n$$

(a_n) ve (b_n) azalardır. limiti vardır ve yakınsaktır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$b_{n+1} \leq b_n, \quad a_{n+1} \leq a_n, \quad b_n \leq a_n$$

1.3. SERİLER

$\forall (a_k)$ dizisine, terimleri i

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad \text{--- (1.3.1)}$$

esitliği ile tanımlanan bir (S_n) dizisi karşılık getirilebilir.

(S_n) dizisine (a_k) 'nin kısmi (parşalı) toplamlar dizisi diyeceğiz.

Burada,

$$S_1 = a_1, S_2 = S_1 + a_2, S_3 = S_2 + a_3, \dots, S_n = S_{n-1} + a_n, \dots \quad \text{--- (1.3.2) dir.}$$

Örnek 1.3.1. $(a_n) = \left(\frac{1}{n(n+1)} \right)$ dizisi için kısmi toplamlar dizisinin ilk dört terimini bulunuz.

Çözüm // $(a_n) = \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \right)$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} \quad S_2 = S_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4} \quad S_4 = S_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}$$

$$\dots S_n = \frac{n}{n+1} \text{ // dir. Yeya,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \text{ //} \end{aligned}$$

TANIM 1.3.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad \text{--- (1.3.3)}$$

toplamına sonsuz seri denir.

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ olmak üzere (S_n) dizisine (1.3.3) serisinin n . basamağında, kısmi (parşalı) toplamlar dizisi, a_n 'e de (1.3.3) serisinin genel terimi denir.

TANIM 1.3.2

Eğer (1.3.3) (S_n) dizisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine

yakınsak seri denir. Bu taktirde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ yazılır.}$$

(S_n) dizisinin limiti olan sonlu ve belirli bu S sayısına, serinin toplamı ya da değeri denir.

Eğer (S_n) ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Örnek 1.3.2.

1- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ yakınsak olup olmadığını araştırınız.

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right) \quad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$ yakınsaktır. Limiti sonlu ve belirli sayıdır.

2- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1$$

Örnek 1.3.3. Harmonik seri denen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır.

Çözüm // $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

$$1 + \frac{1}{2} > 2^0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2^1 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > 2^3 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-2}+2} + \dots + \frac{1}{2^m} > 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}$$

+

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m} > m - \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2^{m+1}} > m - \frac{1}{2} \text{ olduğundan}$$

seri ıraksaktır.

(Bir serinin karakterini bulmak demek, yakınsak veya ıraksak olduğunu göstermek demektir.)

Teorem 1.3.1. Bir serinin yakınsak olması için, serinin genel teriminin $n \rightarrow \infty$ için sıfıra yaklaşması gerekir fakat yetmez.

ispat // $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ serisi yakınsak olsun.

Bu taktirde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dir. Gösterelim.

(Seri yakınsak ise kısmi toplamlar dizisinin limiti vardır.)

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ dir.

$$S_n = \overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}}^{S_{n-1}} + a_n \Rightarrow S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 \quad \text{gereklik} //$$

yetmezlik // $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisinde genel teriminin limiti sıfırdır.

Ama yakınsak değildir.

(Bir seri verildiğinde genel terim, sıfıra yaklaşıyorsa yakınsak veya ıraksaktır; sıfıra yaklaşıyorsa ıraksaktır.)

Örnek 1.3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-7}{8n-1}$ ıraksak mıdır?

Genel terimin limiti $\neq 0$ değildir. $\frac{5}{8}$ olduğu için ıraksaktır.

Sıfır değildir.

Teorem 1.3.2. Bir seride baş taraftan sonlu sayıda terim atılırsa (kaldırılırsa) serinin karakteri değişmez.

ispat // $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_n + \dots$ (1.3.4)

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{k+p} = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots \quad (1.3.5)$$

(1.3.4) serisi yakınsak olsun. Bu taktirde (1.3.5) serisi de yakınsaktır.

Gösterelim.

(1.3.4) serisinin p. basamaktan kısmi toplamlar dizisi (S_p) olsun.

$$S_p = S_k + S_{k+p} \quad k+p=n$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p = \lim_{p \rightarrow \infty} (S_k + S_{k+p}) \quad S_{k+p} = S_p - S_k$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_{k+p} = \lim_{p \rightarrow \infty} (S_p - S_k) = S - S_k = \text{sonlu bir sayı}$$

0 halde (1.3.5) de iraksaktır.

TANIM 1.3.3.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde bastan k tane terimin kaldırılmasıyla elde edilen

$$r_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots \quad (1.3.6)$$

serisine, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin k. basamaktan (mertebeden) kalanı denir.

Teorem 1.3.3. Yakınsak bir seride k. mertebeden kalan,

$k \rightarrow \infty$ (k sonsuz) için sıfırdır.

ispat // $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots + a_1 + \dots$ serisi yakınsak olsun.

Bu; toplamın S olması demektir.

$$S = S_k + r_k \Rightarrow r_k = S - S_k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (S - S_k) = S - S = 0 \text{ dir. //$$

Teorem 1.3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ için,

(Her iki serinin toplamı olduğu için yakınsaktır.)

i- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mp b_n) = s \mp t$

ii- $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \cdot s$, $c \in \mathbb{R}$ (c, sonlu ve belirli bir sayı)

ispat (i) $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = S_n + t_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + t_n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t //$$

(ii) $\sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \cdot S_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot S_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = c \cdot s //$$

1.4. Pozitif Terimli Seriler

Bütün terimleri pozitif olan serilere pozitif terimli seriler denir. Bütün terimleri pozitif olan seriler de pozitif terimli serilere müsbet katılır. ($++ - + \dots + + +$; Sonlu sayıda $+ - + - - - -$ terim atılırsa serinin karakteristiği değişmez ve yine pozitif terimli seridir.) Pozitif terimli seride; $S_{n+1} > S_n$ dir. --- (1.4.1)

Teorem 1.4.1. Pozitif terimli iki seri,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1.4.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (1.4.3)$$

olsun.

1- Eğer belli bir terimden itibaren daima $a_n < b_n$ ve (1.4.3) serisi yakınsak ise (1.4.2) serisi de yakınsaktır.

2- Eğer belli bir terimden itibaren daima $b_n < a_n$ ve (1.4.3) serisi ıraksak ise (1.4.2) serisi de ıraksaktır.

İspat 1, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitif terimli serinin n . basamaktan parçalı toplamlar dizisi (t_n) olsun.

Bu dizi artan dizi ve yukarıdan sınırlıdır. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli serinin n . basamaktan parçalı toplamlar dizisi (s_n) olsun. Bu dizi de artan dizidir. Belli bir terimden itibaren daima $a_n < b_n$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n < \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \quad \text{dir. Yani kısmi toplamlar dizisi artan}$$

dizidir ve yukarıdan sınırlı olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli seri yakınsaktır.

İspat 2, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitif terimli serisi ıraksak olduğundan bunun n .

basamaktan parçalı (t_n) dizisi artandır ve yukarıdan sınırlı değildir.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli serinin (s_n) parçalı toplamlar dizisi artandır ve belli bir terimden itibaren daima $b_n < a_n$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n < \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad \text{dir. O halde } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serisi ıraksaktır.}$$

Örnek 1.4.1 Genel terimleri $a_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = \frac{1}{n^n}$ olan serilerin karakterini bulunuz.

Çözüm // $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 \quad S_n \text{ yakınsaktır.}$$

$n > 2$ için $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$ dir. $n \in \mathbb{N}^+$. b_n de yakınsaktır.

($a_n > b_n$ olduğu için; a_n yakınsak olduğundan b_n de yakınsaktır.)

Örnek 1.4.2. Genel terimi $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ olan serinin karakterini bulunuz.

Çözüm // $n > 1$ için $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ dir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak olduğu için bundan büyük olan a_n serisi de ıraksaktır.

Teorem 1.4.2. (CAUCHY (KÖK) KURALI)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli seride herhangi terimden itibaren $\sqrt[n]{a_n} < k < 1$ ise seri yakınsak, eğer $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ ise seri ıraksaktır.

İspat // $\sqrt[n]{a_n} < k \Rightarrow a_n < k^n$ olur.

Genel terimi; $\sum_{k=1}^{\infty} k^n = k + k^2 + k^3 + \dots + k^n + \dots$ k olan geometrik seridir.

$$S_n = k \frac{1 - k^n}{1 - k} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{k}{1 - k} \quad \text{sonlu ve belirli bir sayı}$$

olduğundan, $\sum_{k=1}^{\infty} k^n$ serisi yakınsaktır. Eğer $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ ise seri ıraksaktır.

Bu teorem aşağıdaki kuralı verir.

CAUCHY KURALI

Pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ olsun.

1- $L < 1$ ise seri yakınsak,

2- $L > 1$ ise seri ıraksak,

3- $L = 1$ ise şüpheli durum vardır. (Ancak L limiti 1'e büyük değerlerle yaklaşıyorsa, serinin ıraksaklığına hüküm verilebilir.)

Teorem 1.4.3. (D'ALEMBERT = BÖLÜM KURALI)

Pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde belli bir terimden itibaren daima $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k < 1$ ise verilen seri yakınsak; eğer $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ise verilen seri ıraksaktır. ($k \in \mathbb{R}^+$)

İspat // $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k \Rightarrow a_{n+1} < a_n k$ olur.

$$n=1 \Rightarrow a_2 < a_1 k$$

$$a_3 < a_2 k$$

$$a_4 < a_3 k$$

$$\vdots$$

$$a_n < a_{n-1} k$$

$$a_n < a_1 k^{n-1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 k^{n-1}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de yakınsaktır.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ise seri ıraksaktır. $a_{n+1} > a_n$

D'ALEMBERT KURALI

Pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ olsun.

1- $L < 1$ ise seri yakınsaktır.

2- $L > 1$ ise seri ıraksaktır.

3- $L = 1$ ise şüpheli durum var. (Limiti olan L , eğer 1'e, 1'den

büyük değerlerle yaklaşuyorsa ıraksaklığına hüküm verilebilir.)

Örnek 1.4.3. Genel terimleri $a_n = \alpha^{\frac{n^2}{2n+1}}$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \alpha^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$

dan serilerin karakterini bulunuz.

Çözüm a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha^{\frac{n^2}{2n+1}}} = \alpha^{1/2} = \sqrt{\alpha}$

i. $\alpha < 1 \Rightarrow$ seri yakınsaktır.

ii. $\alpha > 1 \Rightarrow$ seri ıraksaktır.

iii. $\alpha = 1 \Rightarrow$ seri yine ıraksaktır.

Çözüm b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \alpha^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \alpha^n} = \alpha$

$\alpha < 1$ ise seri yakınsaktır. (negatif değil)

Teorem 1.4.3

$\alpha > 1$ ise seri ıraksaktır.

$\alpha = 1$ ise $b_n = 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$ Genel terim, limit ≤ 1 olmadığı için seri yine ıraksaktır.

$\alpha < 1 \Rightarrow$ yakınsak, $\alpha \geq 1$ ise ıraksaktır.

Teorem 1.4.4. (RAABE KURALI)

Pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}}{\frac{1}{n}} = L$ olsun

1- $L > 1$ ise seri yakınsak,

2- $L \leq 1$ ise seri ıraksaktır.

Teorem 1.4.5. (INTEGRAL TESTİ)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli ve monoton azalan seri, $f(x)$ ise

$1 \leq x$ için monoton azalan bir pozitif fonksiyon ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$f(n) = a_n$ olsun. Bu takdirde,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli serisinin yakınsak olması için gerekli ve

yeterli koşul,

$$I_n = \int_1^n f(x) dx \quad \text{integral değerlerinin sınırlı bir}$$

dizi oluşturmazdır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad I_n = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n$$

serisi ıraksaktır.

Teorem 1.4.6. (Gauss Yakınsaklık Testi)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{w_n}{n^p}, \quad p > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } |w_n| \text{ sonlu bir sayıdır } |w_n| < A$$

1- $a > 1$ ise seri yakınsaktır.

2- $a \leq 1$ ise seri ıraksaktır.

Örnek 1.4.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ serisinin karakterini bulunuz.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1/n^3}{1/(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3}{n^3}$$

$$= \frac{n^2 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3} = 1 + \frac{3}{n} + \frac{3n+1}{n^3} \quad a=3 > 1 \text{ yakınsaktır.} \quad 415$$

Teorem 1.4.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ serisi (hiper harmonik serisi), $\alpha > 1$ ise yakınsak, $\alpha \leq 1$ ise ıraksaktır.

İspat, $\alpha = 1$ için verilen seri harmonik seri olacağı için ıraksaktır.

$\alpha < 1$ ise: $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$ olduğundan seri yine ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

$$1=1 \rightarrow \frac{1}{2^{0(\alpha-1)}}$$

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} < 2^1 \frac{1}{2^\alpha} = \frac{1}{2^{1(\alpha-1)}}$$

$$\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} < 2^2 \frac{1}{2^\alpha} = \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}}$$

$$\frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \dots + \frac{1}{15^\alpha} < 2^3 \frac{1}{2^\alpha} = \frac{1}{2^{3(\alpha-1)}}$$

$$\frac{1}{2^{m\alpha}} + \frac{1}{(2^{m+1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{m+2})^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^{m+1-1})^\alpha} < 2^m \frac{1}{2^{m\alpha}} = \frac{1}{2^{m(\alpha-1)}}$$

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^{m+1})^\alpha} < \frac{1}{2^{0(\alpha-1)}} + \frac{1}{2^{1(\alpha-1)}} + \dots + \frac{1}{2^{m(\alpha-1)}}$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafı, ortak çarpanı $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$ olan geometrik serinin $(m+1)$. inci kısmi toplamı,

$$S_{m+1} = 1 \frac{(1 - \frac{1}{2^{m+1}})^{m+1}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}}$$

$\alpha - 1 > 0$, $\alpha > 1$ ise

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{m+1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}}$$

sağ taraf yakınsak olduğundan bundan küçük olan sol taraf da yakınsaktır.

($\frac{1}{n^\alpha}$ da yakınsaktır.)

Örnek 1.4.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$ serisinin karakterini bulunuz.

$$4n^2 - 2n > n^2? \quad \frac{1}{2n(2n-1)} < \frac{1}{n^2} \text{ yakınsak olduğundan verilen}$$

$$1 \leq n \text{ için } 3n^2 - 2n > 0 \quad \text{bu seri yakınsaktır.}$$

$$4n^2 - 2n > n^2$$

Alıştırılmalar

1- Aşağıda genel terimleri verilen serilerin karakterlerini bulunuz.

a) $a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ b) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ c) $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

d) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ e) $a_n = \frac{1}{n^3}$ f) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$

g) $a_n = \frac{1}{k+n^2}$, $k > 0$ h) $a_n = \frac{1}{3^n}$ i) $a_n = \frac{2^n}{n^3+1}$ j) $a_n = \frac{10^n}{n!}$

k) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$ l) $a_n = \frac{k^n}{n^n}$, $k > 0$ m) $a_n = n^k \cdot p^n$, $p > 0$, k keyfi

n) $a_n = \frac{p^n}{n!}$, $p > 0$ o) $a_n = \frac{3n+5}{n+1}$ p) $a_n = \frac{(n+3)!}{3! \cdot n! \cdot 3^n}$

r) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ s) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ t) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ u) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

2- Aşağıdaki genel terimleri verilen serilerin karakterlerini ve yakınsak olanların toplamlarını bulunuz.

a) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ b) $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ c) $a_n = \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$ $p > 0$

d) $a_n = \frac{1}{(n+3)^2 - 2^2}$ e) $a_n = \frac{1}{(n+1)^2 - \frac{1}{4}}$

Gözümler

1- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$ yakınsak //

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1$ yakınsak //

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \frac{4}{5} < 1$ yakınsak //

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^n}{2 \cdot 3^{n-1}} = 3$ ıraksak.

g) yak. h) ıraksak.

k) $\frac{\sqrt{n}}{1+n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ yakınsak // ($\alpha > 1$)

t) $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ıraksak.

u) $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n \cdot n^2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ yakınsak. $\alpha > 1$ old. için.

TANIM 1.5.1

Sonsuz sayıda pozitif ve sonsuz sayıda negatif terim kapsayan serilere herhangi terimli seri denir. Böyle bir serinin incelenmesinde üç durum karşımıza çıkar.

1. durum, Salt (Mutlak) yakınsaklık.

2. durum, Yarı yakınsaklık.

3. durum, İraksaklık.

1. DURUM: Eğer bir serinin terimlerinin salt değerleriyle oluşturulan seri yakınsak ise böyle seriye salt yakınsak seri denir.

Teorem 1.5.1 Bir seri salt yakınsak ise herhangi terimli seri de yakınsaktır.

İspat,,
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1.5.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (1.5.2)$$

(1.5.3) ... (1.5.1) deki, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ dir. (n. basamakta kısmi toplam)

(1.5.4) ... (1.5.2) deki, $Q_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ dir. (" " " ")

$$S_n = P_n - Q_n \quad (\text{kısmi toplamdır.})$$

n. basamakta kısmi toplam $\Rightarrow Q_n = P_n + Q_n$ dir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = q$ olsun. Her terim pozitif olduğundan (Q_n) artan bir dizidir. O halde (1.5.2), q den küçüktür.

$P_n + Q_n \leq q$ yazılabilir. $\Rightarrow P_n < q$ ve $Q_n < q$ yazılabilir.

O halde, P_n ve Q_n dizileri yukarıdan sınırlıdır. (Pozitif ve artan diziler)

P_n ve Q_n yakınsak dizilerdir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = q, \quad (p \text{ ve } q \text{ sonlu sayılardır.}) \quad \text{1.5.1 denö}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - Q_n) = p - q \quad \text{olur. (Bu da yakınsak bir seridir.)}$$

2. DURUM: Yarı yakınsaklık. Eğer bir seri, salt yakınsak olmadığı halde yakınsak ise, böyle serilere yarı yakınsak seri denir.

3.DURUM: İraksaklık: Herhangi bir seride pozitif ve negatif terimli

serileri ayırdığımızda herhangi biri iraksak ise tüm seri iraksaktır.

1.6. Alterne Seriler

TANIM 1.6.1.

Terimleri, sırasıyla pozitif-negatif, pozitif-negatif, ... olarak
seyreden serilere alterne seriler denir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots \quad (1.6.1.)$$

bir alterne seridir.

Teorem 1.6.1. (Leibniz Kuralı)

Bir alterne seride terimlerin mutlak değerleri azalarak sıfıra
yakınsıyorsa (yaklaşıyorsa), alterne seri yakınsaktır.

İspat// $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \rightarrow 0$$

$n \rightarrow \infty$ iken $|a_n| \neq 0$ ise iraksaktır.

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

$$= \underbrace{(a_1 - a_2)}_{+} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{+} + \dots + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{+} \Rightarrow S_{2n} > 0$$

$$= a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{+} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{+} - \dots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{+} - a_{2n}$$

$$\Rightarrow 0 < S_{2n} < a_1$$

Kısmi toplamlar dizisi sınırlıdır. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ limiti vardır.

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0 \quad \text{limitleri aynıdır.}$$

Örnek 1.6.1// $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ serisinin karakterini bulunuz.

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

Leibniz kuralına göre yakınsaktır.

Yarı yakınsak bir seridir. (2. Durum'dan dolayı)

TANIM 1.7.1.

X bir değişken, c_n ler de sabitler olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \dots + c_n X^n + \dots \quad (1.7.1)$$

biçimindeki seriye, X 'in artan kuvvetlerine göre bir kuvvet serisi denir.

Yine $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (X-k)^n = c_0 + c_1 (X-k) + c_2 (X-k)^2 + \dots + c_n (X-k)^n + \dots \quad (1.7.2)$$

biçimindeki seriye de, $(X-k)$ 'nin artan kuvvetlerine göre bir kuvvet serisi denir.

Serinin karakteri X 'e verilen değerlere bağlıdır.

(1.7.1) $X=0$ için, (1.7.2) de $X=k$ için yakınsaktır.

TANIM 1.7.2.

Bir kuvvet serisini yakınsak yapan, X değişkeninin aralığına bu yakınsaklık aralığı ve bu aralığın yarısının uzunluğuna da yakınsaklık yarısapı denir.

Örnek 1.7.1., a) $\sum_{n=0}^{\infty} X^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ serilerinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarısapını bulunuz.

Çözüm// a- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{X^{n+1}}{X^n} \right| = |X|$ (D'Alembert kuralıyla)

$|X| < 1 \Rightarrow$ yakınsaktır.

$|X| = 1 \Rightarrow$ ıraksaktır. ($X=1$ ve $X=-1$ de)

$-1 < X < 1$ aralıktır. $r=1$ dir. //

b- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{X^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X|}{n+1} = 0 < 1$ yakınsaktır.

Yakınsaklık aralığı $-\infty < X < \infty$ $r=\infty$ dur.

Alıştırmalar

1- Aşağıda genel terimleri verilen serilerin karakterini bulunuz.

a) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ b) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ c) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$

$$d) a_n = (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2n}$$

$$e) a_n = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{3^n}$$

J.F.I. MİMAT

2- Aşağıda genel terimleri verilen kuvvet serilerinin, yakınsaklık aralığını ve yarıyapını bulunuz.

$$a) a_n = n! x^n \quad b) a_n = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$c) a_n = \frac{n!}{n+1} x^{n-1}$$

$$d) a_n = (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$e) a_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

Gözümler

$$1- a) a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\text{Asterne serilerde Leibniz kuralı})$$

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksaktır. $\frac{1}{n}$ den büyüktür. Yarı yakınsak.

b) yakınsak $\sum \frac{1}{n^{1/3}}$ yarı yakınsak.

c) ıraksak.

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^3}{2(n+1)} \cdot \frac{2n}{n^3} \right| = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{mutlak yakınsaktır.}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n(n+1)} \right| = \frac{1}{3} < 1$$

$$2- a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| = \infty \quad \text{mutlak. } x=0 \text{ için yakınsaktır.}$$

$x \neq 0$ ise ıraksaktır.

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{x^{2n+1}} \right| = |x^2| = x^2 \quad |x| < 1 \text{ ise yakınsaktır. } |x| = 1 \text{ ise}$$

$$|x| = 1 \text{ ise}$$

$$x=1 \Rightarrow \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

Örneğin, $(-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ yakınsaktır. (Leibniz'e göre) (mutlak yakınsak)

$-1 < x < 1$ yakınsaklık aralığı. $r=1$ dir.

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^n}{(n!) x^{n-1}} \cdot \frac{n+1}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| = \infty \quad \text{ıraksak}$$

$x=0 \Rightarrow$ yakınsak.

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^2|}{2n(2n+1)} = 0 < 1 \quad \text{yakınsak}$$

$$-\infty < x < +\infty \quad r=\infty$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2} [(n+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2n} (n!)^2}{x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^2|}{4(n+1)^2} = 0 < 1$$

yakınsak
(mutlak)

1.8. Taylor ve Mac Laurin Serileri

$$[x_0, x],]x_0, x[.$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \underbrace{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)}_{\text{Tanımlayıcı terim.}}$$

----- (1.8.1) Taylor formülüdür.

$$f(x) = \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

----- (1.8.2)

(1.8.1) deki tanımlayıcı terim (1.8.2) nin kalanı olarak düşünülebilir.

$f(x) = S_n(x) + r_n(x)$ olarak yazılabilir.

$$f(x) = S_n(x) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[\underbrace{x_0 + \theta(x-x_0)}_c] \quad x_0 < x_0 + \theta(x-x_0) < x$$

1.8.1 MÜHÜR

----- (1.8.3) de Taylor formülüdür.

$$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)] = f(x) - S_n(x) \quad 0 < \theta < 1$$

(1.8.2) Serisinin yakınsak olması ve toplamının $f(x)$ 'e eşit olması için gerekli ve yeterli koşul;

$$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)] \quad \dots \quad (1.8.4)$$

tanımlayıcı terimin, $n \rightarrow \infty$ için sıfıra eşit olmasıdır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-x_0)^{n+2}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-x_0|}{n+2} = 0 \text{ yakınsaktır.}$$

0 halde (1.8.2) de yakınsaktır.

Denek ki, $n \rightarrow \infty$ için tanımlayıcı terim sıfır olduğu zaman,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \quad (1.8.5)$$

yazılabilir.

TANIM 1.8.1.

(1.8.5) eşitliğinin ikinci tarafındaki ifadeye, $f(x)$ fonksiyonunun

Taylor Serisi denir.

Teorem 1.8.1. Bir $f(x)$ fonksiyonunun türevleri $]x_0, x[$ açık aralığında mutlak(salt) değerce, yukarıdan sınırlı iseler bu $f(x)$ fonksiyonu Taylor serisine ağılabılır.

İspat, $0 < \theta < 1$ olmak koşuluyla $x_0 < x_0 + \theta(x - x_0) < x$ dir.

$]x_0, x[$ aralığındaki f 'nin her basanaktan türevi,, $f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]$ biçiminde yazılabilir. Türev, mutlak değerce yukarıdan sınırlı olduğundan,

$$|f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]| < M \text{ yazılabilir. } (M, \text{pozitif sonlu sayı})$$
$$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]| < M \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Yakınsak olduğundan sağ taraf ta yakınsaktır.

TANIM 1.8.2.

(1.8.5) Serisinde $x_0 = 0$ alınarak elde edilen

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots \quad (1.8.6)$$

serisine, Mac Laurin Serisi denir.

Taylor ve Mac Laurin serileri kuvvet serisidirler. Taylor serisi için elde edilen tüm sonuçlar, $x_0 = 0$ alınmak koşuluyla, Mac Laurin serisi için de geçerlidir. Yalnız, tanımlayıcı terim;

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \text{ olacaktır.}$$

Örnek 1.8.1. // Aşağıdaki fonksiyonların MacLaurin serisine ağılıp ağılmadığını araştırınız.

a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = \sin x$

c) $f(x) = e^x$

a) $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = -\sin x \quad f''(x) = -\cos x \quad f'''(x) = \sin x \quad f^{(4)}(x) = \cos x$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $|f^n(0)| \leq 1$ dir. Yani sınırlıdır ve seriye açılabilir.

$$\cos x = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \dots$$

$$= 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (1.8.7)$$

b) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $|f^n(0)| \leq 1$ dir.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (1.8.8)$$

c) $f(x) = e^x$

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad \dots$$

$$0 < x < k, \quad e^x < e^k \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için, $f^n(x) = f(x)$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (1.8.9)$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (1.8.10)$$

1.9. Binom Formülü

$$(x+a)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^{m-n} a^n = \binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} a + \binom{m}{2} x^{m-2} a^2 + \binom{m}{3} x^{m-3} a^3 + \dots + \binom{m}{p} x^{m-p} a^p + \dots + \binom{m}{m} a^m$$

$$n \leq m, \quad \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1) \dots \cancel{(m-n+1)} \cancel{(m-n)} \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n! \cancel{(m-n)!}} = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1!} x^{m-1} a + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^{m-3} a^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{p!} x^{m-p} a^p + \dots + \frac{m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{m!} a^m \quad (1.9.1)$$

(1.9.1) ifadesine Binom(Newton) formülü denir.

$$x=1, a=\frac{1}{m} \text{ alalım.}$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1!} \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!} \frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \frac{1}{m^3} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{p!} \frac{1}{m^p} + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots 3.2.1}{m!} \frac{1}{m^m}$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{3!} + \dots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)}{p!} + \dots$$

$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{m!} \quad \dots (1.9.2)$$

(1.8.10) ile (1.9.2) yi karşılaştıralım. (e'nin kısmi terim toplamıyla (1.9.2) yi karşılaştıralım.)

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < S_m$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \leq e \quad \dots (I)$$

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}, \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$$

$p < m$ olmak koşuluyla, (1.9.2) nin p . mertebeden kısmi toplamını alalım ve S_p ile gösterelim.

$$S_p < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \quad p, m \in \mathbb{N}^+$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p \Rightarrow e \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \quad \dots (II)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e \text{ olur. } //$$

$\lambda \rightarrow 0$ ve $\mu \rightarrow \infty$ iken,

$$\lim (1+\lambda)^\mu = ?$$

$\lambda \rightarrow 0$ ve $\mu \rightarrow \infty$ iken $\lim \mu \cdot \lambda = L$ ise $\lim (1+\lambda)^\mu = e^L$ dir.

Örnek 1.9.1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x = e^3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} \cdot x\right) = 3 //$$

Örnek 1.9.2. $f(x) = (1+x)^m$ fonksiyonunun Mac Laurin serisine açılıp açılmadığını araştırınız.

$1+x > 0$ olmalıdır.

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1} \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

$$f^n(x) = m(m-1) \dots (m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

$$\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{n!} (1+\theta x)^{m-n} \quad 0 < \theta < 1$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1) x^n}{n!} (1+\theta x)^{m-n}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1) x^n}{n! (1+x)^{n-m}} < \frac{m(m-1) \dots (m-n+1) x^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)(m-n) x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n m(m-1) \dots (m-n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n}{n+1} x \right| = |x|$$

Yakınsak olması için $-1 < x < 1$ olmalıdır.

$1+x > 0 \Rightarrow x > -1$ dir. $|x| < 1 \Rightarrow$ yakınsaktır.

Her basamaktan türevi yukarıdan sınırlıdır. O halde seriye aşılabılır.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (1.9.5)$$

$m \in \mathbb{N}^+$, $n > m$ ise

(1.9.5) ifadesine binom serisi denir. ($-1 < x < 1$ olmak şartıyla)

Kuvvet serileri yakınsak ise terim terime türev ve integralleri alınabilir. Bundan yararlanarak bazı fonksiyonların seriye aşılmı yapılabilir. Örneğin; $\ln(1+x)$ ve $\ln(1-x)$ Mac Laurin serisine aşılmaları yapalım.

Çözüm, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^{n+1} x^{n-1} + \dots \quad (1.9.6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (1.9.7)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (1.9.8)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \quad (1.9.9)$$

221 Alıştırımlar

1- Aşağıda genel terimleri verilmiş olan serilerin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

a) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ b) $a_n = \frac{(x-3)^n}{n}$ c) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{1.2.3 \dots (n-1)} x^{2n-2}$

d) $a_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1) x^n}{2.4.6 \dots 2n}$

2- Aşağıdaki fonksiyonları $-1 < x < 1$ için MacLaurin Serisine açınız.

a) $f(x) = \operatorname{arctanh} x$ b) $f(x) = \operatorname{Arctan} x$ c) $f(x) = \operatorname{Arcsin} x$

d) $f(x) = \operatorname{argsh} x$

Çözümler

1- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(x-2)^n} \right| = |x-2| < 1 \Rightarrow \text{yakınsaktır.}$

$-1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$

$|x-2| = 1 \Rightarrow \text{süpheli durum vardır.}$

$x-2 = -1 \Rightarrow x = 1 \quad (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \quad \text{alterne seridir.}$

$x-2 = 1 \Rightarrow x = 3$

$1 < x < 3$ ve $r = 1$ dir. $\frac{1}{1} \frac{2}{2} \frac{3}{3}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right| = |x-3| < 1$

$-1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$

$\Rightarrow 2 < x < 4 \quad r = 1$ dir.

$|x-3| = 1 \Rightarrow x-3 = 1 \Rightarrow x = 4$

$|x-3| = -1 \Rightarrow x-3 = -1 \Rightarrow x = 2$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1.3.5 \dots (2n-3)(2n+1) x^{2n}}{1.2 \dots (n-1)n} \cdot \frac{1.2 \dots (n-1)}{1.3.5 \dots (2n-3) x^{2n-2}} \right| = 2|x^2| < 1$

$\Rightarrow \text{yakınsaktır. } x^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ise}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2} = \left(\frac{1}{2^{1/2}}\right)^{2n-2} = \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)(2n+1)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)n \cdot 2^n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)2^{n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)} \right| = 1 \quad 427$$

Raabe kuralına bakmak gerekir. $(x = \mp \frac{1}{\sqrt{2}})$ için

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)x^{n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)x^n} \right| = |x| < 1$$

$$-1 < x < 1$$

Raabe kuralına bakalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2n+1}{2n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+2-2n-1}{2n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1 \text{ iraksak.}$$

$$2- a) f(x) = \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (b)$$

$$-1 < x < 1$$

$$\operatorname{th} y = x \Rightarrow y = \operatorname{argth} x$$

$$\operatorname{th} y = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x$$

$$\Rightarrow (e^{2y} + 1)x = e^{2y} - 1$$

$$\Rightarrow 1+x = e^{2y}(1-x) \Rightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| //$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x))$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right)$$

$$\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right)$$

$$b) f(x) = \operatorname{Arctan} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \int 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n+1} x^{2n} + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

c) $f(x) = \text{Arcsin } x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Binom açılımından bulunur. $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

(1.9.5) te koyalım.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4} x^2 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} x^n + \dots \quad (1.9.10) \quad (b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \dots + \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} x^{2n} + \dots \quad (1.9.11)$$

$$\text{Arcsin } x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \dots 2n(2n+1)} + \dots \quad (1.9.12)$$

d) $(\text{Argsh } x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ de x yerine x^2 yazıp; (1.9.10) da ; integral alınacak.

1.10. Cauchy - Hadamart Teoremi

Bir kuvvet serisinin hangi x 'ler için yakınsak ve hangi x 'ler için ıraksak olduğu sorusunun cevabı ve yakınsaklık yarıçapının saptanmasına yarayan teoremdir. Bunu ifade edip tanımlayalım.

Teorem 1.10.1. (Cauchy - Hadamart Teoremi)

$\sum c_n x^n$ kuvvet serisi için $(\sqrt[n]{|c_n|})$ dizisinin üst limiti L olsun.

- 1- $L \neq 0$ ve sonlu bir sayı ise $|x| < \frac{1}{L}$ için kuvvet serisi yakınsak,
- 2- $\frac{1}{L} < |x|$ için kuvvet serisi ıraksak,
- 3- $L = 0$ ise kuvvet serisi her x için yakınsak,
- 4- $L = \infty$ ise hiçbir yerde yakınsak değil.

İspat,, $\lim \sqrt[n]{|c_n|} = L$

$$1- \lim \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \lim \sqrt[n]{|c_n|} \cdot \lim \sqrt[n]{|x^n|} = L |x| < 1 \Rightarrow \text{seri yakınsak.}$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{1}{L}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{L} < x < \frac{1}{L} \quad r = \frac{1}{L} \quad (d)$$

$$2- L |x| > 1 \Rightarrow \text{seri ıraksaktır.} \Rightarrow |x| > \frac{1}{L} \Rightarrow \text{seri ıraksak.}$$

$$3- L = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} L |x| < 1 \Rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{yakınsaktır.}$$

$$4- L = \infty \Rightarrow L |x| = \infty |x| = \infty > 1 \text{ ıraksaktır. } (x \neq 0)$$

Eğer $\sum a_n$ serisi yakınsak ve (b_n) dizisi monoton ve sınırlı ise $\sum a_n b_n$ serisi yakınsaktır.

Teorem 1.10.3. (Dirichlet Kriteri)

Eğer $\sum a_n$ serisinin kısmi (parçalı) toplamlar dizisi sınırlı ve (b_n) dizisi monoton ve sıfır dizisi ise ($n \rightarrow \infty$ için genel terim 0 ise) $\sum a_n b_n$ serisi yakınsaktır.

Teorem 1.10.4. Bir $\prod_{n=1}^{\infty} c_n$ sonsuz çarpımın yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $n_0(\varepsilon)$ sayısı bulunmalıdır ki $n > n_0(\varepsilon)$ ve $\forall k \geq 1$ için

$$|c_{n+1} c_{n+2} \dots c_{n+k} - 1| < \varepsilon$$

kalsın.

II. BÖLÜM

DEĞİŞKEN TERİMLİ DİZİLER VE SERİLER

(Fonksiyon Dizileri ve Serileri)

2.1. Değişken Terimli Diziler

TANIM 2.1.1.

$a_k(x)$ fonksiyonları $\forall n \in \mathbb{N}$ için aynı bir J aralığında tanımlanmış olsunlar.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \dots (2.1.1)$$

ile tanımlanan,

$$(S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots) \dots (2.1.2)$$

bişimindeki diziye değişken terimli dizi denir ve kısaca $(S_n(x))$ ile gösterilir.

TANIM 2.1.2.

$S_n(x)$ dizisinin $\forall x \in J$ için bir limiti varsa (ki bu limit x 'in bir fonksiyonudur.) bu dizi yakınsaktır denir. Ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) \text{ yazılır.}$$

İki sonuç ortaya çıkar. Bunlar ; $S_n(x)$ fonksiyonlarının sürekli olduğu noktalarda acaba $S(x)$ limit fonksiyonu da sürekli midir ? Ya da $\forall x \in J$ için $S_n(x)$ fonksiyonları türevlenebilir iseler acaba $S(x)$ limit fonksiyonu J de türevlenebilir midir ?

Örnek 2.1.1. $a > 0$ ve $x \geq 0$ olmak üzere

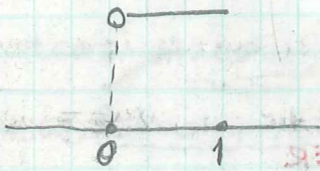
$$S_n(x) = \frac{nx}{a+nx}$$

fonksiyonlarını ele alalım. $J = [0, 1]$ olsun. $n \in \mathbb{N}$

$$x = -\frac{a}{n} < 0 \quad S_1(x) = \frac{x}{a+x}, S_2(x) = \frac{2x}{a+2x}, \dots$$

$\forall x \in J$ için $S_n(x)$ fonksiyonu sürekli dir.

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{nx}{a+nx} = \begin{cases} 0, & x=0 \text{ ise} \\ 1, & x \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$



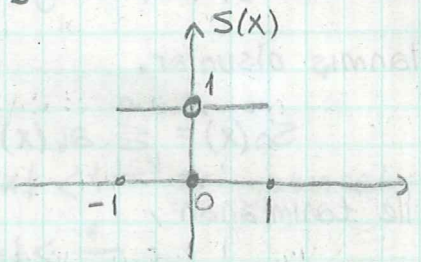
0'da limit fonksiyonu sürekli değildir.

Örnek 2.1.2. $a_n(x) = x^2(1-x^2)^n$ fonksiyonu $[-1, 1]$ kapalı aralığında sürekli dir.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n x^2(1-x^2)^k \text{ dan oluşan } (S_n(x))' \text{ e bakalım.}$$

$$S_n(x) = x^2 [1 + (1-x^2)^2 + (1-x^2)^3 + \dots + (1-x^2)^n] \\ = x^2 \frac{1 - (1-x^2)^{n+1}}{1 - (1-x^2)} = 1 - (1-x^2)^{n+1}$$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x=0 \text{ ise} \end{cases}$$



Değişken terimli dizilerde iki türlü yakınsaklık vardır.

1- $n_0 < m, n$ için $|S_m(x) - S_n(x)| < \epsilon$ bağıntısını sağlayan

n_0 doğal sayısı J deki her x için başka başkadır. Yani bu n_0 doğal sayısı hem ϵ 'a hem de x 'e bağlıdır.

Başka bir deyimle $n_0(\epsilon, x) < m, n$ için

$|S_m(x) - S_n(x)| < \epsilon$ kalacak biçimde $n_0(\epsilon, x)$ sayısı bulunabilir.

J tanım aralığındaki tüm x 'ler için.

431

2- $n_0(\epsilon) < m, n$ olduğunda $(\forall x \in J) |S_m(x) - S_n(x)| < \epsilon$ kalabilir.

(Bu doğal sayı x 'den bağımsızdır ve yalnız ϵ 'a bağlıdır.)

Bu da Cauchy dizisi olma koşuludur.

TANIM 2.1.3.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $(S_n(x))$ fonksiyon dizisi ve $\forall S_n(x)$ fonksiyonlarının ortak tanım aralığı J olsun. $(S_n(x))$ dizisi J de düzgün yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall x \in J$ için $\exists S(x)$ ve $\epsilon > 0$ için $\exists n_0(\epsilon)$ (öyle bir $n_0(\epsilon)$) vardır ki, $\forall x \in J$ ve $n_0(\epsilon) \leq n$ için $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ kalmasıdır.

TANIM 2.1.4.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $(S_n(x))$ fonksiyonlarının tanım aralığı J olsun. $(S_n(x))$ fonksiyon dizisi düzgün Cauchy fonksiyon dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_0(\epsilon)$ vardır ki, $\forall x \in J$ ve $\forall m, n \geq n_0(\epsilon)$ için $|S_m(x) - S_n(x)| < \epsilon$ kalmasıdır.

Teorem 2.1.1. Değişken terimli bir dizi düzgün yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul, bu dizinin düzgün Cauchy fonksiyon dizisi olmasıdır.

İspat // $\Rightarrow$: Yani dizi J de düzgün yakınsak olsun. Bu demektir ki, $x \in J$ olmak üzere $\exists S(x)$ ve $\epsilon > 0$ için $\exists n_0(\epsilon)$ vardır ki, $\forall x \in J$ ve $\forall n_0(\epsilon) \leq n$ için $|S_n(x) - S(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ kalır.

$$n_0(\epsilon) \leq m, n \text{ için } |S_m(x) - S(x) + S(x) - S_n(x)|$$

$$\leq |S_m(x) - S(x)| + |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$$

$< \frac{\epsilon}{2} \qquad \qquad \qquad < \frac{\epsilon}{2}$

$\Leftarrow$: Yani dizi, J de düzgün Cauchy dizisi olsun.

Bu demektir ki, $\forall x \in J$ ve $\epsilon > 0$ için $n_0(\epsilon) \leq m, n$ için öyle bir $n_0(\epsilon)$ vardır ki $|S_m(x) - S_n(x)| < \epsilon$

$n_0(\varepsilon) \leq m$ için, yani $m \rightarrow \infty$ için $S_m(x) \rightarrow S(x)$

$$|S_m(x) - S_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

Teorem 2.1.2. $S_n(x)$ bir fonksiyon dizisi olsun ve bu fonksiyon dizisi J de düzgün olarak $S(x)$ 'e yaklaşıp. Eğer $\forall S_n(x)$ fonksiyonu bir $x_0 \in J$ noktasında sürekli ise $S(x)$ fonksiyonu da x_0 noktasında sürekli dir.

İspat, $(S_n(x))$ fonksiyon dizisi J de düzgün yakınsak olduğundan

$\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists N(\varepsilon)$ vardır ki $\forall x \in J$ ve $N(\varepsilon) \leq n$ için

$$(|x - x_0| < \delta), |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ kalır.}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) \rightarrow S(x_0) \quad |S(x) - S(x_0)| < \varepsilon \right) ?$$

$$n(\varepsilon) \leq n, n_0 \text{ için } |S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|S(x) - S(x_0)| = |S(x) - S(x_0) + S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x) + S_{n_0}(x_0) - S_{n_0}(x_0)|$$

$$\leq \underbrace{|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)|}_{\varepsilon/3} + \underbrace{|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)|}_{\varepsilon/3} + \underbrace{|S_{n_0}(x) - S(x)|}_{\varepsilon/3} < \varepsilon$$

Dizinin limitinin yakınsak olması için yeterli koşuldur.

(Limit fonksiyonunun sürekli olması düzgün yakınsaklığın yeter koşuldur.)

Örnek, $J = [a, b]$, $a > 0$

$$S_n(x) = \frac{nx}{a + n^2 x^2} \text{ olsun. } x_0 = 0 \text{ alalım. } S_n(x) \text{ 'e bakalım.}$$

$\forall S_n(x)$ fonksiyonları sürekli dir.

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0 \text{ limit fonksiyonu da aynı noktada sürekli dir.}$$

$$S_n(0) = 0, n_0(\varepsilon) \leq n \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \text{ olmalıdır.}$$

$$|S_n(x) - S(x)| = |S_n(x) - 0| = \left| \frac{nx}{a + n^2 x^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{nx}{a + n^2 x^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{nx}{\varepsilon} < a + n^2 x^2 \Rightarrow n^2 x^2 - \frac{x}{\varepsilon} n + a = 0$$

$$\Rightarrow n_{1/2} = \frac{\frac{x}{\varepsilon} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4\varepsilon^2} - a x^2}}{x^2} \Rightarrow \text{verilen fonksiyon dizisi,}$$

x_0 noktasında sürekli olmasına karşı düzgün yakınsak değildir.

1- $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı r ise $\sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı r dir. Gösteriniz.

2- Aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} x^n}{n!}$

B.S.S. Mimar

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

Gözümler

1- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} |x| = L |x| < 1 \Rightarrow$ yakınsak

$\Rightarrow |x| < \frac{1}{L}$

$\Rightarrow -\frac{1}{L} < x < \frac{1}{L}$

$\Rightarrow r = \frac{1}{L} //$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n C_n x^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x|^{n-1}}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot L \cdot |x| < 1$

$= L |x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{L}$

$\Rightarrow -\frac{1}{L} < x < \frac{1}{L} \quad r = \frac{1}{L} //$

2-a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+2) x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1) x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+2)}{(n+1)} x \right|$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) x \right| = e |x| < 1 \Rightarrow$ yakınsak. $r = \frac{1}{e} //$

2.2. Değişken Terimli Seriler

TANIM 2.2.1.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için f_k fonksiyonlarının tanım aralığı J olsun. Eger $\forall x \in J$ için $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ olmak üzere $(S_n(x))$ J de düğün yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisine J de düğün yakınsaktır denir.

TANIM 2.2.2.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için tanım kümesi J olan f_n fonksiyonlarının bir

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi verilmiş olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğine göre, eğer $n_0(\varepsilon) < n$,

$\forall x \in J$ ve $1 \leq k$ için,

$$|S_{n+k}(x) - S_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon \quad (2.2.1)$$

olacak biçimde yalnız ε 'a bağlı $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisine J de düzgün yakınsaktır denir.

TANIM 2.2.3.

Terimleri tanım (2.2.2) deki koşulları sağlayan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi verilmiş olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğine göre $n_0(\varepsilon) < \infty$ ve $\forall x \in J$ için

$$|R_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon$$

olacak biçimde yalnız ε 'a bağlı, x 'e bağlı olmayan bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisine J de düzgün yakınsaktır denir.

Teorem 2.2.1. $\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları J de tanımlı olsunlar ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi de J de düzgün yakınsasın ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = S(x)$ olsun. Eğer $\forall f_n$ fonksiyonları bir $x_0 \in J$ noktasında sürekli ise toplam $S(x)$ fonksiyonu da $x_0 \in J$ noktasında sürekli dir.

İspat // $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisinin n . basamaktan parçalı toplamı $S_n(x)$ tir.

Serinin düzgün yakınsaklık tanımına göre $(S_n(x))$ dizisi düzgün yakınsaktır.

Bu dizinin limiti $S(x)$ dir. Teorem 2.1.2 ye göre $(S_n(x))$ dizisi

düzgün yakınsak ve $S_n(x)$ fonksiyonları $x_0 \in J$ de sürekli olduğundan

$S_n(x)$ fonksiyonu da $x_0 \in J$ de sürekli dir.

Teorem 2.2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sonsuz serisi $[a, b]$ kapalı aralığında

düzgün yakınsak, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = F(x)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n$

olsun. Bu takdirde ;

1- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsaktır ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ (sonlu bir sayı)

2- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisinin $F(x)$ toplamının da $x \rightarrow a$ için limiti vardır

ve $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = B$ dir. $\left(\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$

İspat 1,, Hipotezden $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi $J=[a,b]$ de düzgün yakınsak olduğundan, $\forall x \in J \exists n_0(\varepsilon)$ vardır ki $\forall \varepsilon > 0$ ve $n_0(\varepsilon) < n$.

$$\forall k \geq 1 \text{ için, } |S_{n+k}(x) - S_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon$$

kalacak biçimde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Buradan limite geçecek olursak, yani $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n$ den,

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+k}| < \varepsilon \text{ dir. Bu ise } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ serisinin}$$

n . mertebeden kalanının sıfıra yaklaştığını (yakınsadığını) gösterir.

Bunun anlamı da b_n serisi yakınsaktır ve toplamı sonlu bir sayıdır.

İspat 2,, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisinin n . basamaktan kısmi (parşalı) toplamını t_n ve n . basamaktan kalanını da K_n ile gösterelim.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ serisinin } n. \text{ basamaktan parşalı toplamını } S_n(x) \text{ ve}$$

n . basamaktan kalanını da $R_n(x)$ ile gösterelim.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Böylece } F(x) = S_n(x) + R_n(x) \\ B = t_n + K_n \end{array} \right\} \text{ yazılabilir.}$$

$x \rightarrow a, F(x) \rightarrow B \quad |F(x) - B| < \varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz.

$$|f(x) - B| = |S_n(x) + R_n(x) - t_n - K_n| \leq |S_n(x) - t_n| + |R_n(x)| + |K_n|$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi düzgün yakınsak olduğundan $\forall x \in J$ ($J=[a,b]$) ve $\forall \varepsilon > 0$ ve $n_0(\varepsilon) < n$ için,

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ olacak şekilde } n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ seçilebilir.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi de yakınsak olduğundan çok büyük n 'ler için ($n_0 < n$)

$$|K_n| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ olacak şekilde } n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ seçilebilir.}$$

$$\text{Öte yandan } \lim_{x \rightarrow a} S_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{i=1}^n f_i(x) = t_n \text{ olduğu için}$$

öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, $|x - a| < \delta$ olduğsa

$$|S_n(x) - t_n| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ kılınabilir.}$$

$|x - a| < \delta$ olduğsa $|F(x) - B| < \varepsilon$ kalır. Yani,

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = B \text{ dir.}$$

Teorem 2.2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi $J=[a,b]$ kapalı aralığında düzgün yakınsak

ve f_n fonksiyonları bu aralıkta sürekli olsunlar. Bu takdirde,

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$$

dir.

İspat // $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S_n(x) + R_n(x)$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx &= \int_a^b S_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx \\ &= \int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx + \int_a^b R_n(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx \\ &\quad \text{(sonlu bir seri)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx$$

($\forall x \in J, n_0(\epsilon) < n$ için $|R_n(x)| < \epsilon$ kalmalıdır.)

Sonuç // $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi $J=[a,b]$ de düzgün yakınsak ve f_n de sürekli ise,

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$$

koşulları sağlandığında terim terime integrallenebilir.

Teorem 2.2.4. $n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları $J=[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve

f'_n türevleri bu aralıkta sürekli olsunlar. Ayrıca $\forall x \in J$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = f(x) \quad \text{--- (2.2.2)}$$

serisi yakınsaktır. Ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots = g(x) \quad \text{--- (2.2.3)}$$

serisi düzgün yakınsak olsun. Bu takdirde (2.2.3) serisinin $[a,b]$

aralığında türevi vardır ve

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots$$

dir. ($[a,b]$ aralığında yakınsak ve sürekli olduğundan terim terime türevlenebilir.)

İspat // $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ serisi J de düzgün yakınsak ve f'_n fonksiyonları

J de sürekli olduklarından teorem 2.2.3'e göre (integrallenebilir.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x) \text{ fonksiyonu integrallenebilir.}$$

$$\begin{aligned}
 x \in [a, b] \text{ olmak koşuluyla } \int_a^x g(t) dt &= \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(t) dt \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f'_n(t) dt \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(t)]_a^x \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_n(a))
 \end{aligned}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'(x)$$

Sonuç // $\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right)$ koşulları sağlandığında terim terime türevlenebilir.

2.3. Değişken Terimli Sonsuz Serilerin

Düzenli Yakınsaklığı Hakkında Ölçütler (Kriterler)

TANIM 2.3.1.

Değişken terimli bir $(S_n(x))$ dizisi bir J aralığında tanımlanmış olsun. Eğer J deki bütün x 'ler ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|S_n(x)| \leq M$ bağıntısını sağlayan $M > 0$ sayısı varsa $(S_n(x))$ dizisi J de düzenli sınırlıdır denir.

Teorem 2.3.1. (Abel Ölçütü)

$\forall x \in J$ için,

1- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ serisi düzenli yakınsak,

2- $(b_n(x))$ dizisi $\forall$ sabit x için gerçel ve monoton sınırlı bir dizi oluşturuyor ve

3- $(b_n(x))$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in J$ için düzenli sınırlı ise

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ serisi $\forall x \in J$ için düzenli yakınsaktır.

Teorem 2.3.2. (Dirichlet Ölçütü)

1- $x \in J$ için $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ serisinin parçalı toplamları düzenli sınırlı ve

2- $(b_n(x))$ dizisi düzenli olarak ve sabit $\forall x \in J$ için monoton bir

şekilde sıfıra yaklaşıyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ serisi J de düzenli yakınsaktır.

Teorem 2.3.3. (Weierstrass Ölçütü)

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in J$ için tanımlı f_n fonksiyonlarının $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi verilmiş olsun. Eğer $\forall x \in J$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli seri yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi J de düzgün yakınsaktır.

İspat // $\forall x \in J$ için ve $k \geq 1$ için tanım (2.2-2) den $|S_n(x)| \leq a_n$

$$|S_{n+k}(x) - S_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+k}(x)|$$

$$\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots + |f_{n+k}(x)|$$

$$\leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif (yakınsak seride) n basamakları

kalanı büyük doğal sayılar için sıfıra yakınsar.

$$n_0(\varepsilon) < n \text{ için } a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0(\varepsilon)$ sayısı bulunabilir. Böylece $\forall x \in J$ ve $n_0(\varepsilon) < n$ için

$$|S_{n+k}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

kalacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Yani,

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi J de düzgün yakınsaktır.

Alıştırma

1- Aşağıdaki serilerin hangi x 'ler için düzgün yakınsak olduklarını araştırınız.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^x}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

2- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ serisinin toplamı, sürekli bir fonksiyon mudur? Araştırınız.

3- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ serisinin, terim terim türevlenebileceğini araştırınız.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ dir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pozitif terimli seri yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

serisi $\forall x \in \mathbb{R}$ için düzgün yakınsar.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ dir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pozitif terimli seri yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$

serisi (Weierstrass ölçütüne göre) düzgün yakınsar.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ dir.

Aynı şekilde yakınsaktır. (Düzgün yakınsaktır.)

d) $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\left| \frac{\sin nx}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$ dir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ yakınsak olduğundan seri, düzgün yakınsaktır.

e) $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ve $\alpha > 1$ için $\left| \frac{\sin nx}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ dir.

$\alpha > 1$ olmak koşuluyla $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ serisi düzgün yakınsaktır.

f) $\frac{x^n}{1+x^{2n}} < \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{x^{n+1}} \cdot \frac{x^n}{1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} < 1 \Rightarrow$

$1 < |x| \Rightarrow x < -1$ ve $1 < x$ olmalı.

$\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1/x^n}{1+\frac{1}{x^{2n}}} < \frac{1/x^n}{1/x^{2n}} = x^n$ yakınsaklık koşuluna bakalım.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

$|x| = 1$ in dışında her yerde yakınsaktır.

• Bir fonksiyonun terim terim türevlenebilmesi için, kendisinin yakınsak, türev fonksiyonunun düzgün yakınsak olması gerekir. (3. soru için)

2- $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\left| \frac{\cos nx}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$ dir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$ $\rightarrow$ düzgün sürekli

$\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\frac{\cos nx}{n(n+1)}$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ 'de süreklidir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)} = \frac{\cos x}{1.2} + \frac{\cos 2x}{2.3} + \frac{\cos 3x}{3.4} + \dots + \frac{\cos nx}{n(n+1)} + \dots = S(x)$$

funksiyonu $\mathbb{R}$ 'de süreklidir.

3- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi yakınsaktır. (düzgün yakınsaktır.) Türev fonksiyonu olan $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ de düzgün yakınsak ise bu seri terim terim türevlenebilir idi (Teorem 2.2.4 den dolayı)

$$\frac{\sin nx}{n^3} \leq \left(\frac{1}{n^3} \right) \rightarrow \text{genel terimi den seri yakınsak olduğundan bundan büyük den seri de yakınsaktır.}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $\frac{\sin nx}{n^3}$ fonksiyonları süreklidir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \text{ serisi } \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ ve } \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \left(\frac{1}{n^2} \right) \text{ olur.}$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ serisi terim terim türevlenebilir.

- III. BÖLÜM -

İntegral Kavramının Genişletilmesi

3.1. Has Olmayan İntegraller

f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı olması için bu aralıktaki sürekli ve sınırlı olması gerekir.

$f: [a, r] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \leq r$ olmak koşuluyla $[a, r]$ de integrallenebilir olsun. Bu integral F olsun.

TANIM 3.1.1.

$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} F(r)$ nin limiti belirli ve sonlu bir sayı ise,

$\int_a^{\infty} f(x) dx$ integraline yakınsaktır denir. Eğer bu limit yok ya da $F \infty$ ise $\int_a^{\infty} f(x) dx$ integraline ıraksaktır denir.

Benzer şekilde, $s \leq a$ olmak koşuluyla

$$f:]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[s, a]$ 'da integrallenebilir olsun. Bu integral F olsun.

TANIM 3.1.2.

$\lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^a f(x) dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} F(s)$ 'nin limiti belirli ve sonlu bir sayı ise,

$\int_{-\infty}^a f(x) dx$ integrali yakınsaktır denir. Eğer bu limit yok ya da $\pm\infty$ ise

$\int_{-\infty}^a f(x) dx$ integrali ıraksaktır denir.

Bu tanımlara göre aşağıdaki integrallerin yakınsak olup olmadıklarını araştırınız.

Örnek 3.1.1. a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ c) $\int_{-\infty}^1 e^x dx$

Çözümler

a) $1 \leq r$ için, $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \frac{dx}{x^2} = \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^r = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{r} + 1\right) = 1$

sonlu sayı olduğu için integrallerir ve yakınsaktır.

b) $1 \leq r$ için, $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \frac{dx}{x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^r = \lim_{r \rightarrow \infty} \ln r = \infty$ ıraksaktır.

c) $s \leq 1$ için $\lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^1 e^x dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} e^x \Big|_s^1 = \lim_{s \rightarrow -\infty} (e - e^s) = e$.

sonlu bir sayıdır ve integrallerir, yakınsaktır.

Örnek 3.1.2. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını irdelleyiniz.

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ b) $\int_1^{\infty} a^x dx$

a) $1 \leq r$ olmak üzere $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \frac{dx}{x^p} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^r$

$p=1$ için ıraksak olduğu

örnek 3.1.1. de görüldü.

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (r^{1-p} - 1)$$

$p > 1 \Rightarrow$ yakınsaktır.

$p \leq 1 \Rightarrow$ ıraksaktır.

100 b) $\int_1^{\infty} a^x dx$ 'e bakalım.

($y = a^x$, $a < 0$ ve $a = 1$ değildir.)

$1 \leq r$ olmak koşuluyla

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r a^x dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{a^x}{\ln a} \Big|_1^r = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln a} (a^r - a)$$

3.1.2 TANIM

$0 < a < 1 \Rightarrow \int_1^{\infty} a^x dx$ yakınsaktır. ($\ln$ negatif olur.)

$a > 1 \Rightarrow \int_1^{\infty} a^x dx$ ıraksaktır.

UYARI: $f: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun

$\int_a^{\infty} f(x) dx$ integrali için $a \leq b$ olmak koşuluyla,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx$$

yazılabilir.

TANIM 3.1.3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^c f(x) dx + \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_c^r f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx \text{ yazılır.}$$

Örnek 3.1.3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$= \lim_{s \rightarrow -\infty} \text{Arctan } x \Big|_s^0 + \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Arctan } x \Big|_0^r$$

$$= \lim_{s \rightarrow -\infty} -\text{Arctan } s + \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Arctan } r$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ yakınsaktır.}$$

($\int_{-\infty}^a$, $\int_0^{+\infty}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}$ integralleri, 1. türden has olmayan integrallerdir.)

İkinci Türden Has Olmayan İntegraller

$[a, b]$ aralığında tanımlı olan f fonksiyonu a 'nın yakınında

sınırsız ise $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $k > 0$ çok küçük bir sayı

olmak üzere $[a+k, b]$ aralığında integrallenebiliyorsa şu tanım

yapılır:

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_a^{b-k} f(x) dx$$

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow 0^+} F(k)$ 'nin limiti belirli ve sonlu bir sayı ise

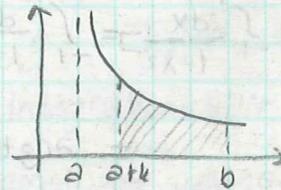
$\int_a^b f(x) dx$ integrali yakınsaktır. Eğer bu limit yok ya da bu limit ∞ ise $\int_a^b f(x) dx$ integrali ıraksak olur.

Berzer şekilde ;

$[a, b]$ aralığında tanımlı olan f fonksiyonu

b 'nin yakınında sınırsız ise $k > 0$ çok küçük bir sayı olmak üzere

f , $[a, b-k]$ aralığında integrallenebiliyorsa şu tanım yapılır ;



TANIM 3.1.5.

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_a^{b-k} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow 0^+} F(k)$ 'nin limiti belirli ve sonlu bir sayı ise $\int_a^b f(x) dx$ integrali yakınsaktır denir. Eğer bu limit yoksa ya da ∞ ise $\int_a^b f(x) dx$ integrali ıraksaktır denir.

3.1.4. Aşağıdaki integrallerin yakınsak olup olmadıklarını araştırınız.

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, b) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$

a) $\lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{k \rightarrow 0^+} x^{1/2} \Big|_k^1 = 2 \lim_{k \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{k}) = 2$ yakınsaktır.

b) $\lim_{k \rightarrow 0^+} \int_k^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{k \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2x^2} \Big|_k^1 = -\frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow 0^+} (1 - \frac{1}{k^2}) = \infty$ ıraksaktır.

3.1.5. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ integralinin yakınsaklık durumunu p 'ye göre irdelleyiniz.

$p=1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = -\ln 0 = \infty$ ıraksaktır.

$p \neq 1 \Rightarrow \int_0^1 x^{-p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_0^1 = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}} \Big|_0^1$

$p \geq 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ integrali ıraksaktır.

$p < 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ integrali yakınsaktır.

Yine $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a < c < b$ olmak üzere c 'nin kollarında sınırsız olabilir. Bu durumda şu tanım yapılır.

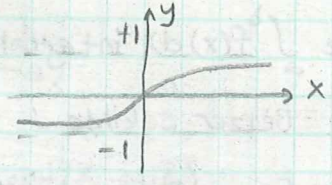
TANIM 3.1.6.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad c \in]a, b[$$

yazılır.

Örnek 3.1.6. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{1-x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{argth} x \Big|_{-1}^0 + \operatorname{argth} x \Big|_0^1 \\ &= \operatorname{Argth} 0 - \operatorname{Argth}(-1) + \operatorname{Argth}(1) - \operatorname{Argth}(0) \\ &= -(-\infty) + \infty = \infty \quad \text{ıraksaktır.} \end{aligned}$$



Alıştırma

Aşağıdaki integrallerin yakınsak olup olmadıklarını araştırınız.

a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ d) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

e) $\int_0^{\infty} e^{-4x} dx$ f) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ g) $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ h) $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

i) $\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ j) $\int_{-\infty}^0 e^{5x} dx$ k) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2^x}$ l) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+2}}$

m) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ n) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+8}$ o) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ p) $\int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}}$

r) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ s) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+13}$ t) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^2}$

Çözümler

a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ $x=u^2 \Rightarrow dx=2u du$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \frac{2u du}{u(1+u^2)} = 2 \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = 2 \operatorname{Arctan} u \Big|_0^{\infty} = 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{x} \Big|_0^{\infty} \\ &\quad (\operatorname{Arctan} 0 = 0) \end{aligned}$$

$$= 2(\operatorname{Arctan} \infty - \operatorname{Arctan} 0) = 2 \frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{yakınsaktır.}$$

d) $\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \Big|_0^{\infty} = \infty$ ıraksaktır.

e) $\int_0^{\infty} e^{-4x} dx = -\frac{1}{4} e^{-4x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4}$ yakınsaktır.

f) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\frac{3}{4} + (x+\frac{1}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}(x+\frac{1}{2}) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}(\frac{1}{2})$ yakınsaktır.

Teorem 3.2.1. (Karşılaştırma Testi)

1- $\forall x \in [a, \infty[$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olmak üzere

$$f, g : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları $a \leq r$ için $[a, r]$ aralığında İntegrallenebilir olsunlar.

Eğer $\int_a^\infty g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)dx$ İntegrali de yakınsaktır. Ve bu durumda, $\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx$ dir.

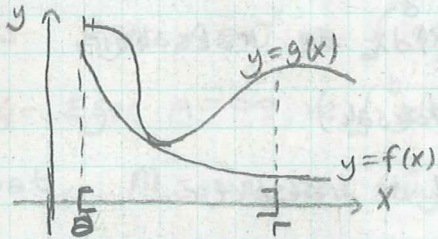
2- $\forall x \in]a, b]$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ve $\forall k > 0, a+k \leq b$ için a 'nın yakınlığında sınırsız olan

$$f, g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları $[a+k, b]$ aralığında İntegrallenebilir olsunlar. Eğer

$\int_{a+k}^b g(x)dx$ yakınsak ise $\int_{a+k}^b f(x)dx$ de yakınsaktır. Bu durumda, $\int_{a+k}^b f(x)dx \leq \int_{a+k}^b g(x)dx$ dir.

İspat 1 //



$$\forall a \leq r, F(r) = \int_a^r f(x)dx$$

$$, G(r) = \int_a^r g(x)dx$$

bu şekilde tanımlanan F ve G fonksiyonları azalmayan fonksiyonlardır.

(Yani r büyüdükçe alan büyür.)

$$a \leq r_1 \leq r_2 \Rightarrow F(r_1) \leq F(r_2) \text{ ve } G(r_1) \leq G(r_2) \text{ dir.}$$

Veya $F(r_2) - F(r_1) \geq 0$ ve $G(r_2) - G(r_1) \geq 0$ dir.

$$F(r_2) - F(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} f(x)dx \geq 0, G(r_2) - G(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} g(x)dx \text{ olur.}$$

hipotezden, $\forall a \leq r$ için $F(r) \leq G(r)$ yazılabilir.

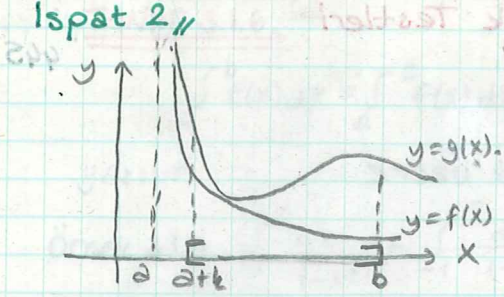
hipotezden, $\int_a^\infty g(x)dx$ İntegrali yakınsak olduğundan,

$\lim_{r \rightarrow \infty} G(r)$ nin limiti belirli ve sonlu bir sayıdır. Yani

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G(r) < M \text{ dir. } \lim_{r \rightarrow \infty} F(r) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} G(r) < M \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$$

İntegrali yakınsaktır.

İspat 2 //



Yani $\lim_{k \rightarrow 0^+} F(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} G(k) < M$

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} F(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} G(k) < M$$

$$G(k) = \int_{a+k}^b g(x) dx$$

küçükse iraksak ise büyükse de iraksaktır.

$$F(k) = \int_{a+k}^b f(x) dx$$

$$G(k) = \int_{a+k}^b g(x) dx$$

$$F(k) \leq G(k)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} G(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_{a+k}^b g(x) dx = \int_a^b g(x) dx \text{ in limiti sonlu ve } < M \text{ dir.}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} F(k) \leq \lim_{k \rightarrow 0^+} G(k) < M$$

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \int_{a+k}^b f(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_{a+k}^b g(x) dx < M$$

Uyarı // Bu teoremin kısıtlarını alırsak 1 ve 2 deki varsayımları altımda

(1') $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali iraksak ise $\int_a^\infty g(x) dx$ de iraksaktır.

($0 \leq f(x) \leq g(x)$ $f(x)$ iraksak $\Rightarrow g(x)$ de iraksak.)

(2') $\int_a^b f(x) dx$ integrali iraksak ise $\int_a^b g(x) dx$ de iraksaktır.

(büyükse iraksak $\Rightarrow$ küçükse de iraksaktır.)

Örnek 3.2.1. a) $\int_1^\infty \frac{x dx}{x^2 + k^2}$

b) $\int_2^\infty \frac{\coth x}{x} dx$

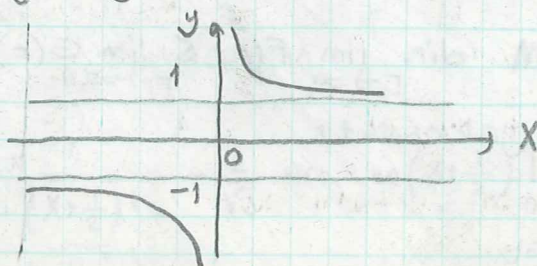
integrallerinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

a) $\frac{x}{x^2 + k^2} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \quad \forall x \in [1, \infty[$ için yazılır.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^\infty = 0 + 1 = +1 \text{ yakınsaktır.}$$

Teorem 3.2.1 in (1). pikine göre yakınsaktır.

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$



$$\forall x \in [2, \infty[\text{ için } \frac{1}{x} \leq \frac{\coth x}{x}$$

(447)

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ ıraksaktır ve bundan büyük olan $\int_2^{\infty} \frac{\coth x}{x} dx$ de ıraksaktır.

Teorem 3.2.2. (Bölüm Testi)

1- $\forall x \in [a, \infty[$ için $0 \leq f(x)$, $0 \leq g(x)$ ve $\forall a \leq r$ için f ile g fonksiyonları $[r, \infty[$ aralığında integrallenebilir olsunlar.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in]0, \infty[\text{ oluyorsa}$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \Leftrightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ yakınsaktır.}$$

2- $\forall x \in]a, b]$ için $0 \leq f(x)$, $0 \leq g(x)$ ve $\forall k > 0$, $a+k \leq b$ için f ve g fonksiyonları $[a+k, b]$ aralığında integrallenebilir olsunlar.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in]0, \infty[\text{ oluyorsa}$$

$$\int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ yakınsaktır.}$$

- Eğer $A=0$ ve $\int_a^b g(x) dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x) dx$ de yakınsaktır.

- Eğer $A=\infty$ ve $\int_a^b g(x) dx$ ıraksak ise $\int_a^b f(x) dx$ de ıraksaktır.

3- m sayısı çok büyük bir sayı ise $m \leq x$ için $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \frac{A}{2}$

$$-\frac{A}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} - A < \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3A}{2} \quad (\varepsilon = \frac{A}{2} > 0)$$

$$0 < \frac{A}{2} g(x) < f(x) < \frac{3A}{2} g(x) \quad m \leq x \text{ için yazılabilir.}$$

Teorem 3.2.1 den, $\int_m^{\infty} f(x) dx$, $\int_m^{\infty} g(x) dx$ (1). şikkına göre

ikisi de yakınsak veya ikisi de ıraksaktır.

$$\left. \begin{aligned} \int_a^{\infty} f(x) dx &= \int_a^m f(x) dx + \int_m^{\infty} f(x) dx \\ \int_a^{\infty} g(x) dx &= \int_a^m g(x) dx + \int_m^{\infty} g(x) dx \end{aligned} \right\} \text{ ıraksak veya yakınsaktır. //$$

Benzer şekilde diğerleri de ispatlanabilir.

Örnek 3.2.2. a) $\int_2^{\infty} \frac{x^3}{2x^8-5} dx$ b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$ integrallerinin yakınsak

olup olmadığını araştırınız.

$$\forall x \in [2, \infty[\text{ için } \frac{1}{x} \leq \frac{\coth x}{x}$$

(447)

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ ıraksaktır ve bundan büyük olan $\int_2^{\infty} \frac{\coth x}{x} dx$ de ıraksaktır.

Teorem 3.2.2. (Bölüm Testi)

1- $\forall x \in [a, \infty[$ için $0 \leq f(x)$, $0 \leq g(x)$ ve $\forall a \leq r$ için f ile g fonksiyonları $[a, r]$ aralığında integrallenebilir olsunlar.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in]0, \infty[\text{ oluyorsa}$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \Leftrightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ yakınsaktır.}$$

2- $\forall x \in]a, b]$ için $0 \leq f(x)$, $0 \leq g(x)$ ve $\forall k > 0$, $a+k \leq b$ için a 'nın yakınlarında sınırsız olan f ve g fonksiyonları $[a+k, b]$ aralığında integrallenebilir olsunlar.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in]0, \infty[\text{ oluyorsa}$$

$$\int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ yakınsaktır.}$$

3- Eğer $A=0$ ve $\int_a^b g(x) dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x) dx$ de yakınsaktır.

4- Eğer $A=\infty$ ve $\int_a^b g(x) dx$ ıraksak ise $\int_a^b f(x) dx$ de ıraksaktır.

İspat // M sayısı çok büyük bir sayı ise $M \leq x$ için $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \frac{A}{2}$

$$-\frac{A}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} - A < \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3A}{2} \quad (\varepsilon = \frac{A}{2} > 0)$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{A}{2} g(x) < f(x) < \frac{3A}{2} g(x) \quad M \leq x \text{ için yazılabilir.}$$

Teorem 3.2.1 den, $\int_M^{\infty} f(x) dx$, $\int_M^{\infty} g(x) dx$ (1). sıkkına göre

ikisi de yakınsak veya ikisi de ıraksaktır.

$$\left. \begin{aligned} \int_a^{\infty} f(x) dx &= \int_a^M f(x) dx + \int_M^{\infty} f(x) dx \\ \int_a^{\infty} g(x) dx &= \int_a^M g(x) dx + \int_M^{\infty} g(x) dx \end{aligned} \right\} \text{ ıraksak veya yakınsaktırlar. //$$

Benzer şekilde diğerleri de ispatlanabilir.

Örnek 3.2.2. a) $\int_2^{\infty} \frac{x^3}{2x^8-5} dx$ b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$ integrallerinin yakınsak

olup olmadığını araştırınız.

5.3.3) $f(x) = \frac{x^3}{2x^8-5}$ ve $g(x) = \frac{x^3}{2x^8} = \frac{1}{2x^5}$ olsun. $\forall x \in [2, \infty[$ için $0 < f(x), 0 < g(x)$ olmalı.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^8-5} \cdot \frac{2x^8}{x^3} = 1$$

$g(x) = \int_2^{\infty} \frac{dx}{2x^5}$ yakınsaktır. O halde $f(x)$ de yakınsaktır.

b) $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ ve $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$
 > 0 > 0

$$\forall x \in]0, \pi/2] \text{ için, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^{3/2}} \cdot \frac{x^{1/2}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^{\pi/2} = \text{sonlu bir sayı olduğundan yakınsaktır}$$

O halde $f(x)$ de yakınsaktır.

(Veya $\left| \frac{\sin x}{x^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{x^{3/2}} \rightarrow$ yakınsak ise diğeri de yakınsaktır.
 $\rightarrow$ ıraksaktır. O halde bu yolla söylenemez.)

Teorem 3.2.3.

1- $\int_a^{\infty} f(x) dx$ integrali için $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = A$ sonlu ve $p > 1$ ise

$\int_a^{\infty} f(x) dx$ integrali yakınsak

$A \neq 0$ ($A = \infty$ olabilir.) $p \leq 1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$ ıraksaktır.

2- $\int_a^b f(x) dx$ integrali için $\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^p f(x) = A$ ve $p < 1$ ise

$\int_a^b f(x) dx$ integrali yakınsaktır.

$g(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$ alınırsa.

$A = \infty$ olabilir. $p \geq 1$ ise $\int_a^b f(x) dx$ integrali ıraksak

$g(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$ alınırsa $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^p f(x) = B$ sonlu $p < 1$ ise $\int_a^b f(x) dx$ integrali yakınsak

$B \neq 0$ ($B = \infty$ olabilir.) $p \geq 1$ ise $\int_a^b f(x) dx$ in integrali ıraksaktır.

Teorem 3.2.4.

1- $\forall a \leq r$ için $f: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, r]$ kapalı aralığında integrallenebiliyorsa ve $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ integrali yakınsak ise $\int_a^{\infty} f(x) dx$ integrali de yakınsaktır.

2- $\forall k > 0, a+k \leq b$ için a noktasının yakınlarında sınırsız olan

$f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a+k, b]$ aralığında integrallenebilir ve

$\int_a^b |f(x)| dx$ integrali yakınsak ise $\int_a^b f(x) dx$ integrali de yakınsaktır.

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & f(x) \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x), & f(x) \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f^+, f^- : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$$

$$f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \text{ dir.}$$

$$0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|,$$

$$0 \leq f^-(x) \leq |f(x)| \text{ dir}$$

$$\int_a^\infty f^+(x) dx \text{ ile } \int_a^\infty f^-(x) dx \text{ 'e}$$

bakalım.

$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ eşitlik doğru olduğundan, her iki tarafın

$$\begin{aligned} \text{integrali alınırsa, } \int_a^\infty f(x) dx &= \int_a^\infty (f^+(x) dx - f^-(x) dx) \\ &= \int_a^\infty f^+(x) dx - \int_a^\infty f^-(x) dx \end{aligned}$$

Benzer şekilde (2) de ispatlanır.

TANIM 3.2.1.

$\int_a^\infty f(x) dx$ (ya da $\int_a^b f(x) dx$) integrali yakınsak olsun.

$\int_a^\infty |f(x)| dx$ (ya da $\int_a^b |f(x)| dx$) yakınsak ise $\int_a^\infty f(x) dx$ (ya da $\int_a^b f(x) dx$)

integraline salt (mutlak) yakınsaktır denir. Tersine,

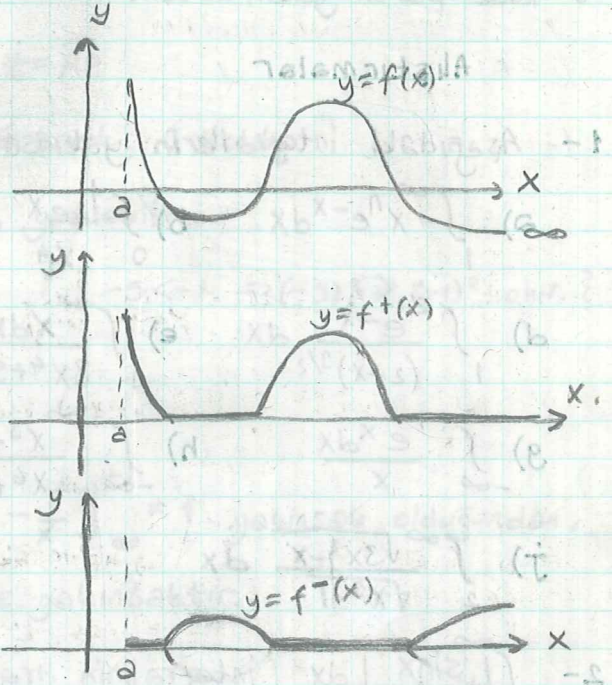
$\int_a^\infty |f(x)| dx$ (ya da $\int_a^b |f(x)| dx$) integrali iraksak ise

$\int_a^\infty f(x) dx$ (ya da $\int_a^b f(x) dx$) yakınsak integrallerine kopullu yakınsaktır

denir.

Örnek 3.2.3. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$ integrali kopullu yakınsak mıdır? değil midir?

olacak şekilde



$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx + \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx \quad \left| \frac{\sin x}{x^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{x^{3/2}} \quad x \in [\pi/2, \infty[\text{ de yakınsaktır.}$$

İkisi de yakınsaktır. Ama mutlak değeri için birşey söylenemez.

0 halde şartlı yakınsaktır.

Alıştırılmalar

1- Aşağıdaki integrallerin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

a) $\int_1^{\infty} x^n e^{-x} dx$ b) $\int_0^1 \frac{e^x}{x^4} dx$ c) $\int_{-\infty}^{-1} x^2 \sin^4\left(\frac{1}{x}\right) dx$

d) $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(2-x)^{3/2}} dx$ e) $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{3x^4 + 5x^2 + 1}$ f) $\int_2^{\infty} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^6 + 16}} dx$

g) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x dx}{x}$ h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^6 + 1} dx$ i) $\int_1^{\infty} (e^{1/x} - 1) dx$

j) $\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - x}}{\sqrt{x^3 - 1}} dx$

2- $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ integralinin ıraksak olduğunu göst.

3- Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık türünü belirleyiniz.

a) $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ b) $\int_0^{\pi} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

4- Mutlak (salt) yakınsak bir integral yakınsaktır. Kanıtlayınız.

8.11.94/SALİ

• $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$ $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in]0, \infty[$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin x}{x} = 1$ yakınsaktır.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ $p < 1 \Rightarrow$ yakınsaktır. •

1.8.8 MÜHÜR

Gözümler:

1- a) $\int_1^{\infty} x^n e^{-x} dx$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots$

$\frac{x^n \cdot x^2}{(n+2)!} < e^x \Rightarrow \frac{x^n}{e^x} < \frac{(n+2)!}{x^2}$

$\frac{1}{(n+2)!} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ yakınsaktır.

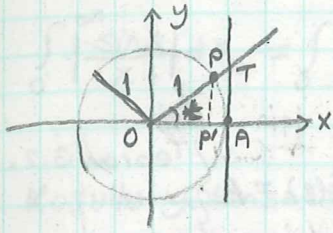
Bundan büyük olan sorudaki integral de yakınsak olur.

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{x^4} dx$ $0 \leq x \leq 1$ için $\frac{1}{x^4} \leq \frac{e^x}{x^4}$ olur.

(451)

$\int_0^1 \frac{dx}{x^4}$ ıraksak olduğundan bundan büyük olan sorudaki integral ıraksaktır.

c) $\int_{-\infty}^{-1} x^2 \sin^4\left(\frac{1}{x}\right) dx$



$\sin t \leq \widehat{AP} \leq \widehat{AT}$

$* = \frac{\widehat{AP}}{1}, * = \widehat{AP}$

$\sin t \leq t \leq \tan t$ 0 halde

$\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$ yazılabilir.

$\Rightarrow x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ olur.

$\{-5 < -1 \Rightarrow (-5)^2 \geq (-1)^2 \text{ olur.}\}$

$\Rightarrow \sin^4\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x^4}$

$\Rightarrow x^2 \sin^4\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{-1} x^2 \sin^4\left(\frac{1}{x}\right) dx \leq \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-\infty}^{-1} = 1$ yakınsak olduğundan,

bundan küçük olan $\int_{-\infty}^{-1} x^2 \sin^4\left(\frac{1}{x}\right) dx$ de yakınsaktır.

d) $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(2-x)^{3/2}} dx$

$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow e^1 \leq e^x \leq e^2$ olur. $\Rightarrow \frac{1}{e^2} < \frac{1}{e^x}$

$\int_1^2 \frac{e^{-2} dx}{(2-x)^{3/2}} = \frac{1}{e^2} \int_1^2 \frac{dx}{(2-x)^{3/2}} = \frac{1}{e^2} \int_1^2 (2-x)^{-3/2} dx = \frac{2}{e^2} \frac{1}{(2-x)^{1/2}} \Big|_1^2 = \infty$

ıraksak olduğundan, $\frac{1}{e^2(2-x)^{3/2}} < \frac{1}{e^x(2-x)^{1/2}}$ büyük olan da ıraksaktır.

e) $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{3x^4 + 5x^2 + 1}$

$f(x) = \frac{x}{3x^4 + 5x^2 + 1}$ $g(x) = \frac{1}{x^3}$ olsun.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3x^4 + 5x^2 + 1} \cdot \frac{x^3}{1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ yakınsak olduğundan

bölüm testi'ne göre $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{3x^4 + 5x^2 + 1}$ integrali de yakınsaktır.

f) $\int_2^{\infty} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^6 + 16}} dx$

$2 \leq x$ için $\frac{1}{2x} \leq \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^6 + 16}}$

$\frac{1}{2x} < \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^6 + 16}} \Rightarrow \frac{1}{2} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$ ıraksak olduğundan verilen integral ıraksaktır.

g) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x dx}{x}$

$x = -u$ değişimi yapalım.

$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x dx}{x} = \int_{\infty}^1 \frac{e^{-u} (-du)}{-u} = \int_1^{\infty} \frac{e^{-u} du}{u} < \int_1^{\infty} e^{-u} du = -e^{-u} \Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{e}$ yakınsak.

$1 \leq u < \infty$

küçük olan da yakınsaktır.

$$12. h) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x^3+x^2}{x^6+1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1} dx$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1} dx + \int_0^{\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1} dx \Rightarrow x^p = x^3 \text{ alırsak}$$

$x = -u$ değişimini yapalım.

$$-\int_0^{\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1} dx = -\int_0^{\infty} \frac{(-u)^3+u^2}{u^6+1} (-du)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{-u^3+u^2}{u^6+1} du$$

$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ için} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = A \end{array} \right\}$ Teorem 3.2.3.

$u^p = u^3$ alalım. -1 sonludur. Yakınsaktır.

$x^p = x^3$ alalım. Her iki integral yakınsaktır. //

i) $\int_1^{\infty} (e^{1/x} - 1) dx$ (Bölüm testini uygulayalım)

$$f(x) = e^{1/x} - 1 \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \text{L'Hospital 'den}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \text{ ıraksaktır.}$$

(Her ikisi de yakınsak veya her ikisi de ıraksak olmalıdır.)

0 halde $\int_1^{\infty} (e^{1/x} - 1) dx$ de ıraksaktır. //

j) $\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{3x^2-x}}{\sqrt{x^3-1}} dx$ (Teorem 3.2.3'ü uygulayalım.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/2} \frac{\sqrt{3x^2-x}}{\sqrt{x^3-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^3-x^2}}{\sqrt{x^3-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2(3x-1)}}{\sqrt{x^2(x-1)}} = \sqrt{3}, \quad p = 1/2 < 1$$

Teorem 3.2.3'e göre $p > 1$ ise yakınsak olduğundan bu integral ıraksaktır. //

2- $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \dots$

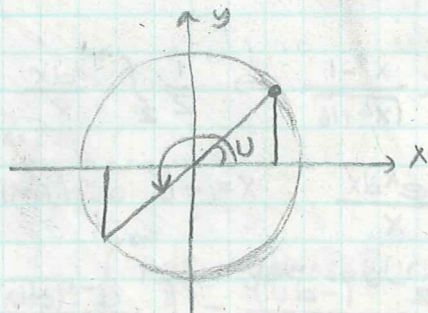
↓ serisi alterne seridir.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (-1)^n \frac{\sin x}{x} dx$$

$$x = u + n\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(u+n\pi)}{u+n\pi} du$$

$0 \leq u \leq \pi$ ise

alterne seri yapalım.



$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(-1)^n \sin u}{u+n\pi} du \quad \text{Leibniz kuralını uygulayalım.}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi} du = \frac{2}{u+n\pi} \quad \text{yakınsaktır.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi} du \quad \frac{2}{u+n\pi} \geq \frac{2}{\pi+n\pi}$$

$$\frac{2}{(n+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n+1}$$

Kosullu yakınsaktır. //

$$3- a) \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\frac{1}{x} = u, \sin x dx = dv \text{ diyelim.}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^r \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos x}{x} \right) \Big|_{\pi/2}^r - \int_{\pi/2}^r \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$$\text{mutlak yakınsaktır.} \quad = 0 - \int_{\pi/2}^r \frac{\cos x}{x^2} \quad \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx = \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{1}{x^2} > 1 \text{ olduğundan.}$$

$$b) \int_0^{\pi} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad \frac{1}{x} = u \text{ dönüşümü yapalım.}$$

$$x=0 \Rightarrow u=\infty, x=\pi \Rightarrow u=\frac{1}{\pi} \quad dx = -\frac{du}{u^2} \quad x = \frac{1}{u}$$

$$\int_{\infty}^{1/\pi} u \cdot \sin u \left(-\frac{du}{u^2} \right) = -\int_{1/\pi}^{\infty} \frac{\sin u}{u} \quad \text{bir önceki sorudan mutlak yakınsaktır.}$$

4- mutlak yakınsak bir integral yakınsaktır.

$$\int_a^b |f(x)| dx \text{ yakınsak ise } \int_a^b f(x) dx \text{ de yakınsaktır.}$$

ispat // $a \leq x \leq b$ için $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ yazılabilir.

$$\int_a^b [f(x) + |f(x)|] dx \leq \int_a^b 2|f(x)| dx$$

$$\leq 2 \int_a^b |f(x)| dx$$

$$f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)| \text{ olur.}$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq 2 \int_a^b |f(x)| dx - \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

4.1. KÜMELER VE FONKSİYONLAR

$P(x)$ önermesini sağlayan her x nesnelerin tümüne küme, nesnelere de kümenin elemanı denir.

$$A = \{P \mid P \in \mathbb{R}^3, |P - P_0| \leq r\}$$

TANIM 4.1.1

X ve Y gibi iki küme verilsin. X 'in her elemanını Y 'nin bir ve yalnız bir elemanına karşılık tutan f kuralına fonksiyon denir. Ve

$$f: X \rightarrow Y \text{ ya da } x \xrightarrow{f} Y$$

biçiminde gösterilir. X 'e fonksiyonun tanım kümesi, (D_f) , Y 'ye de değer (görüntü) kümesi (R_f) denir.

Bir fonksiyonun var olması için aşağıdaki üç koşul verilmelidir.

i- Tanım kümesi.

ii- Değer kümesi.

iii- f kuralı.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Örneğin; } y = 5x - 7 \text{ ise} \\ f: x \rightarrow y \\ x \rightarrow 5x - 7 \end{array} \right.$$

TANIM 4.1.2.

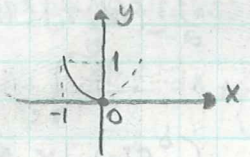
$A \subset X$ olmak koşuluyla, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. A kümesinin f altındaki görüntüsü $f(A)$ ile gösterilir ve

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

biçiminde yazılır. Buna alt kümenin görüntüsü denir.

Örneğin, $A = [-1, 0]$ olsun. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow x^2$

$$f(A) = [0, 1]$$



TANIM 4.1.3.

Bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ve $y_0 \in Y$ verilsin. $y_0 \in Y$ nin ters görüntüsü $f^{-1}(y)$ ile gösterilir. ve

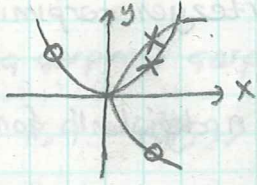
$$f^{-1}(y_0) = \{x \mid f(x) = y, x \in X\}$$

yazılır. Burada f^{-1} in, R_f 'den D_f 'ye fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul f 'nin, D_f 'den R_f 'ye bire-bir ve örten olmasıdır.
($X \rightarrow Y$)

Yani, $\forall x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ veya

$\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ olmalıdır.

nek 4.1.1. $f: X \rightarrow Y$
 $x \rightarrow x^2 \quad (-\infty, 0), (0, \infty)$ aralığında bire-bir olur.



$\Rightarrow$ (aynı olmalar birbirlerinin ters fonksiyonudur.)

TANIM 4.1.4.

$H \subset Y$ olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. H kümesinin ters görüntüsü $f^{-1}(H)$ ile gösterilir ve

$$f^{-1}(H) = \{x \mid x \in X, f(x) \in H\}$$

yazılır. Buna da alt kümenin ters görüntüsü denir.

TANIM 4.1.5.

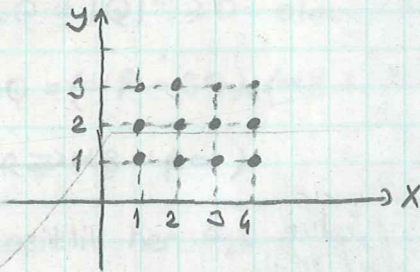
X ve Y gibi iki kümenin dik (kartezyen) çarpımı $X \times Y$ ile gösterilir ve

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

biçiminde tanımların. (x, y) 'lere ikili denir.

nek 4.1.2. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ $Y = \{1, 2, 3\}$

$$X \times Y = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$



$X = Y$ ise $X \times Y = X \times X = X^2$ olur.

$X = \mathbb{R}$ ve $Y = \mathbb{R}$ ise $X \times Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ iki boyutlu öklid uzayıdır.

Benzer şekilde $X_1, X_2, \dots, X_n$ n tane küme ise

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$$

Eğer, $X_1 = X_2 = \dots = X_n = \mathbb{R}$ ise

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n \text{ n boyutlu öklid uzayı}$$

yani tüm n 'lerin kümesidir.

22) A ile B herhangi iki küme C'de başka bir küme olsun.

$$f: A \times B \rightarrow C$$

$(x,y) \rightarrow f(x,y)$ fonksiyonuna iki değişkenli fonksiyon denir.

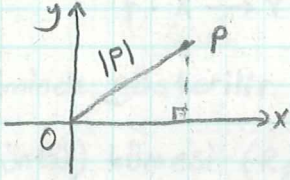
Benzer şekilde $X_1, X_2, \dots, X_n$ n tane kümenin kartezyen çarpımına

$$f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonuna n değişkenli fonksiyon denir.

Örnek 4.1.3. $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \rightarrow f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$ iki değişkenli fonsiyondur.

$P \in \mathbb{R}^2$, $|P| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow P$ nin başlangıç noktasına olan uzaklığıdır.



Benzer şekilde, $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ noktasının başlangıç noktasına olan uzaklığı da,

$$|P| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \text{ ile verilir.}$$

Yine $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktaları arasındaki uzaklık ise,

$$|P-Q| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} \text{ ile verilir.}$$

Eğer $P \in \mathbb{R}$ ise $P = P(x) = x$

$$P = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases} \text{ olur.}$$

Uzaklık bir fonksiyondur öyle ki, A boş olmayan bir küme olmak üzere

$$A \times A \xrightarrow{d} \mathbb{R}$$

$$(x,y) \rightarrow d(x,y) = |x-y| = |y-x|$$

biçiminde bir fonksiyondur. Bu fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlar :

* **i-** Herhangi P noktası için $|P| = |-P|$ dir.

ii- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $|\lambda P| = |\lambda| \cdot |P|$ dir.

iii- $|P-Q| = |Q-P|$ dir.

iv- $\forall P, Q$ için, $|P+Q| \leq |P| + |Q|$ (Üçgen eşitsizliği) dir.

Uzaklık fonksiyonunun bu özellikleri sağladığını kanıtlamak için, ispatta kullanacağımız bazı özellikleri görelim.

$P, q \in \mathbb{R}$ için $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $q = q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ noktalarının skaler (iç çarpımı) çarpımı, $P \cdot q$ ya da $\langle P, q \rangle$ biçiminde gösterilir ve

$$P \cdot q = \langle P, q \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. İç çarpımın aşağıdaki özellikleri vardır:

i - $P \cdot P = P^2$ bilineerlik özelliği.

ii - $P \cdot q = q \cdot P$ iç çarpımın değişme özelliği

iii - $P(q+r) = P \cdot q + P \cdot r$ soldan dağılma

$(P+q)r = P \cdot r + q \cdot r$ sağdan dağılma

iv - $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha P) \cdot (\beta q) = (\alpha \beta)(P \cdot q) = \alpha \beta P \cdot q$ olur.

Teorem 4.1.1. (Schwartz Eşitsizliği) :

$P, q \in \mathbb{R}^n$ noktaları için,

$$P \cdot q \leq |P| \cdot |q|$$

eşitsizliği vardır.

İspat, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $Q = \alpha P - \beta q$ yazalım. $Q \in \mathbb{R}^n$

$$Q \cdot Q = |Q|^2 \geq 0 \text{ olduğundan}$$

$$Q \cdot Q = (\alpha P - \beta q) \cdot (\alpha P - \beta q) = \alpha^2 |P|^2 - \alpha \beta P \cdot q - \beta \alpha P \cdot q + \beta^2 |q|^2$$

$$(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \beta = \beta \alpha) \quad = \alpha^2 |P|^2 - 2\alpha \beta P \cdot q + \beta^2 |q|^2 \geq 0$$

Bu eşitlik her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için doğrudur. $\alpha = |q|$, $\beta = |P|$ özel olarak

bunlar için de eşitlik doğru olur.

$$P \neq 0, q \neq 0 \quad = |P|^2 |q|^2 - 2|P||q| P \cdot q + |P|^2 |q|^2 \geq 0$$

$$|P||q| \text{ ya bölersek, } = |P||q| - 2P \cdot q + |P||q| \geq 0$$

$$\Rightarrow |P||q| \geq P \cdot q$$

İ- $|P| = |-P|$

$$|-P| = \begin{cases} -P, & -P > 0 \text{ ise} \\ 0, & -P = 0 \text{ ise} \\ -(-P), & -P < 0 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} -P, & P < 0 \text{ ise} \\ 0, & P = 0 \text{ ise} \\ P, & P > 0 \text{ ise} \end{cases} = |P|$$

Uzaklık fonksiyonunun bu özellikleri sağladığını kanıtlamak için, ispatta kullanacağımız bazı özellikleri görelim.

$P, q \in \mathbb{R}$ için $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $q = q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ noktalarının skaler (iç çarpımı) çarpımı, $P \cdot q$ ya da $\langle P, q \rangle$ biçiminde gösterilir ve

$$P \cdot q = \langle P, q \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. İç çarpımın aşağıdaki özellikleri vardır:

i - $P \cdot P = P^2$ bilineerlik özelliği.

ii - $P \cdot q = q \cdot P$ iç çarpımın değişme özelliği

iii - $P(q+r) = P \cdot q + P \cdot r$ soldan dağılma

$(P+q)r = P \cdot r + q \cdot r$ sağdan dağılma

iv - $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha P) \cdot (\beta q) = (\alpha \beta)(P \cdot q) = \alpha \beta P \cdot q$ olur.

Teorem 4.1.1. (Schwartz Eşitsizliği) :

$P, q \in \mathbb{R}^n$ noktaları için,

$$P \cdot q \leq |P| \cdot |q|$$

eşitsizliği vardır.

İspat // $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $Q = \alpha P - \beta q$ yazalım. $Q \in \mathbb{R}^n$

$$Q \cdot Q = |Q|^2 \geq 0 \text{ olduğundan}$$

$$Q \cdot Q = (\alpha P - \beta q) \cdot (\alpha P - \beta q) = \alpha^2 |P|^2 - \alpha \beta P \cdot q - \beta \alpha P \cdot q + \beta^2 |q|^2$$

$$(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \beta = \beta \alpha) \quad = \alpha^2 |P|^2 - 2\alpha \beta P \cdot q + \beta^2 |q|^2 \geq 0$$

Bu eşitlik her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için doğrudur. $\alpha = |q|$, $\beta = |P|$ özel olarak bunlar için de eşitlik doğru olur.

$$P \neq 0, q \neq 0 \quad = |P|^2 |q|^2 - 2|P||q| P \cdot q + |P|^2 |q|^2 \geq 0$$

$$|P| \cdot |q| \text{ ya bölersek,} \quad = |P| |q| - 2 P \cdot q + |P| \cdot |q| \geq 0$$

$$\Rightarrow |P| |q| \geq P \cdot q$$

İspat // i -

$$\star |P| = |-P| \quad |-P| = \begin{cases} -P, & -P > 0 \text{ ise} \\ 0, & -P = 0 \text{ ise} \\ -(-P), & -P < 0 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} -P, & P < 0 \text{ ise} \\ 0, & P = 0 \text{ ise} \\ P, & P > 0 \text{ ise} \end{cases} = |P|$$

İspat, $P+q = (p_1+q_1, p_2+q_2, \dots, p_n+q_n)$ $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$

$$r(P+q) = \sum_{i=1}^n r_i(p_i+q_i) = \sum_{i=1}^n r_i p_i + \sum_{i=1}^n r_i q_i = rP + rQ //$$

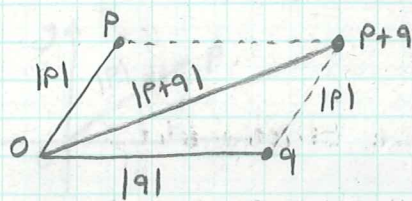
İspat $\star |q-p| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i-x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2} = |p-q|$
iii-

$\star$ İspat, iv - $|p+q|^2 = (p+q)(p+q) = |p|^2 + 2pq + |q|^2 \leq |p|^2 + 2|p||q| + |q|^2$

$$\Rightarrow |p+q|^2 \leq (|p|+|q|)^2$$

$$\Rightarrow |p+q| \leq |p|+|q|$$

$$\Rightarrow |p+q| \leq |p|+|q| //$$
 Üçgen eşitsizliğidir.



$$B[p_0, r] = \{p \mid |p-p_0| \leq r\}, p \in \mathbb{R}^3$$

$$p_0 = p + \lambda(q-p)$$

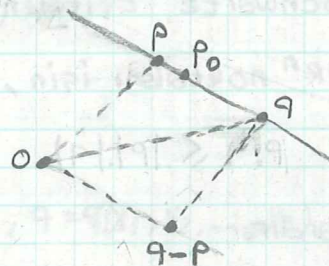
$$0 < \lambda < 1 \Rightarrow p_0, p \text{ ile } q \text{ arasındadır.}$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow p_0, q \text{ ile çakışır.}$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow p_0, p \text{ ile çakışır. } \lambda = 1 \text{ ise } p_0, q \text{ ile çakışır.}$$

$$-\infty < \lambda < \infty \Rightarrow p_0 \text{ noktası } \Delta \text{ doğrusunu girer.}$$



TANIM 4.1.6

p ve q gibi farklı iki noktadan geçen doğru,

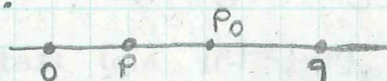
$$\{p_0 \mid p_0 = (1-\lambda)p + \lambda q, -\infty < \lambda < \infty\}$$

$$\begin{cases} p_0 = p + \lambda(q-p) \\ p_0 = (1-\lambda)p + \lambda q \end{cases}$$

noktalarının kümesi olarak tanımlanır.

p_0 noktası p ve q noktaları arasında ise arada olma terminden,

$$\overline{pp_0} + \overline{p_0q} = \overline{pq} \text{ yazılır.}$$



Yukarıdaki tanım ile bunu ispatlayalım.

$$\overline{pp_0} = d(p_0, p) = |p_0 - p| = |(1-\lambda)p + \lambda q - p| = |p - \lambda p + \lambda q - p| = |\lambda(q-p)|$$

$$0 < \lambda < 1 \Rightarrow = \lambda |q-p|$$

$$\overline{P_0 A} = d(P_0, A) = |A - P_0| = |A - ((1-\lambda)P + \lambda A)| = |A - P + \lambda P - \lambda A| \quad (c - 459)$$

$$= |A(1-\lambda) - P(1-\lambda)| = |(1-\lambda)(A - P)| = (1-\lambda)|A - P|$$

$$\overline{P P_0} + \overline{P_0 A} = \lambda|A - P| + (1-\lambda)|A - P| \quad (d)$$

$$= |A - P| = \overline{P A} \quad \text{ispat tamamlanmış olur.}$$

TANIM 4.1.7.

C kümesi boş olmayan noktalar kümesi olsun. C 'nin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasının tamamı C 'de kalıyorsa, C kümesine dış bükey (konveks) küme denir.

$\mathbb{R}^3$ de küre, $\mathbb{R}^2$ de çember birer konveks kümedir.

Konveks kümeyi tanım 4.1.6 yı kullanarak tanımlayalım.

$\mathbb{R}^n$ de bir C kümesi verilmiş olsun. Eğer $\forall P, A \in C$ için $\lambda < 1$ olmak üzere $(1-\lambda)P + \lambda A$ noktaları yine C kümesinin elemanı ise C kümesine konvektir denir.

Örneğin;



kümesi dış bükey (konveks) değildir.

Alıştırma

- 1- $\mathbb{R}^n$ de, $|P_1 + P_2 + \dots + P_n| \leq |P_1| + |P_2| + \dots + |P_n|$ old. göst.
- 2- $P, A \in \mathbb{R}^n$ için $|P| - |A| \leq |P - A|$ olur. kanıtlayınız.
- 3- $A \in \mathbb{R}^2$, $A = (4, 2) \Rightarrow |P| \leq |P - A|$ koşulunu sağlayan P noktalarının kümesinin grafiğini çiziniz.
- 4- $\mathbb{R}^2$ de aşağıdaki nokta kümelerinin grafiğini çiziniz.
 - a) $S = \{P \mid P \in \mathbb{R}^2, |P| + |P - A| = 6, A = (4, 2)\}$
 - b) $H = \{P \mid P \in \mathbb{R}^2, |P| + |P - A| \leq 4, A = (4, 2)\}$
- 5- $A = (1, 1, 3)$ $B = (2, -1, 1)$ dir. $PA = 0$ ve $PB = 0$ olacak şekilde P noktasını bulunuz.
- 6- $A = (2, 0)$ olmak üzere $S = \{P \mid P \in \mathbb{R}^2, |P| < |P - A|\}$ kümesi konveks midir?

b) a şikindaki kapuller altında $[P+9] \leq [P]+[9]$ eşitsizliği doğru mudur?

9- $\mathbb{R}^3$ de bir küre ve içinin noktalarından oluşan bir küme, $\mathbb{R}^2$ de bir çember ve içinin noktalarından oluşan küme konveks midir? Araştırınız.

1- $|p+q| \leq |p|+|q|$

$$\Rightarrow |p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n| \leq |p_1| + |p_2 + p_3 + p_4 + \dots + p_n| \leq |p_1| + |p_2| + |p_3 + p_4 + p_5 + \dots + p_n| \leq \dots \leq |p_1| + |p_2| + \dots + |p_n| \quad \text{olur}$$

2- $|p| - |q| \leq |p| - |q|$?

$$\Rightarrow |p| = |p - 9 + 9| \leq |p - 9| + |9|$$

$$\Rightarrow |p| \leq |p-q| + |q|$$

$$\Rightarrow |p| - |q| \leq |p - q| \quad \text{olur.}$$

3- $A = (4, 2)$, $|P| \leq |P - A|$ $P, A \in \mathbb{R}^2$

$P = (x, y)$ olsun. $P - A = (x - 4, y - 2)$ olur. $|P| = \sqrt{x^2 + y^2}$ den

$$|P-A| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$$

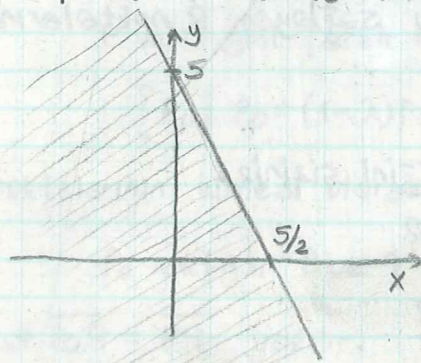
$$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq (x-4)^2 + (y-2)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 - 8x - 4y + 20$$

$$\Rightarrow 0 \leq -8x - 4y + 20$$

$$\Rightarrow 0 \leq -2x - y + 5$$

$$\Rightarrow y \leq 5 - 2x //$$



4-a) $S = \{P \mid P \in \mathbb{R}^2, |P| + |P-A| \leq 6, A = (4, 2)\}$

$$P = (x, y) \text{ olsun. } P - A = (x - 4, y - 2)$$

$$|P| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |P-A| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 6 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} = 6 \Rightarrow (x-4)^2+(y-2)^2 = 36 - 12\sqrt{x^2+y^2} + x^2+y^2 \quad 461$$

$$\Rightarrow x^2-8x+16+y^2-4y+4 = 36-12\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$$

$$\Rightarrow -8x-4y = 16-12\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow -2x-y = 4-3\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow 9(x^2+y^2) = (2x+y+4)^2$$

$$\Rightarrow 9x^2+9y^2 = 16+4x^2+y^2+16x+8y+4xy$$

$$\Rightarrow \underbrace{5x^2}_A + \underbrace{8y^2}_C - \underbrace{4xy}_B - 8y - 16x - 16 = 0$$

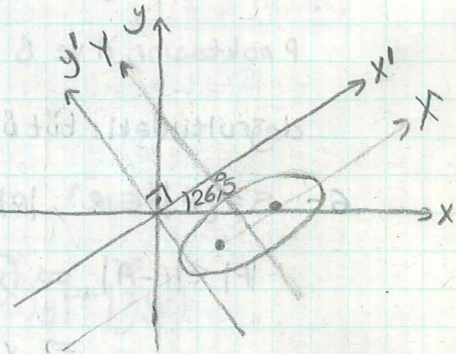
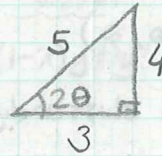
$B^2-4AC = 16-160 = -144 < 0$ elips tipinde bir eğridir.

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{5-8}{-4} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\theta = 26,5^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \right\} \text{ dönme denklemleri}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ öteleme denklemleri.}$$



b) $H = \{P \mid P \in \mathbb{R}^2, |P| + |P-A| \leq 4, A = (4, 2)\}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \leq 4 \Rightarrow x^2+y^2-8x-4y+20 \leq 16+x^2+y^2-8\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow -8x-4y \leq -4-8\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow -2x-y+1 \leq -2\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow 4(x^2+y^2) \leq 4x^2+y^2+1+4xy-4x-2y$$

$$\Rightarrow \underbrace{3y^2}_C - \underbrace{4xy}_B + 4x + 2y - 1 \leq 0$$

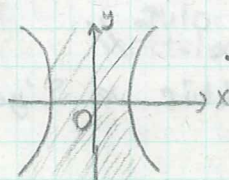
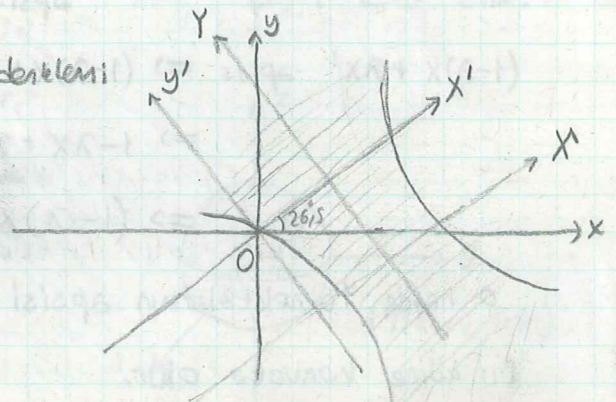
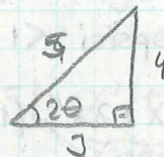
$B^2-4AC = 16-4 \cdot 0 \cdot 3 = 16 > 0$ hiperbol tipinde eğridir.

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{0-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\theta = 26,5^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \right\} \text{ dönme denklemleri}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \text{ öteleme denklemleri}$$



≤ 1 için $\Rightarrow$

5- $A=(1,1,3)$, $B=(2,-1,1)$

$PA=0$, $PB=0$, $P=(x,y,z) \neq (0,0,0)$ homojen denklemdir.

$$PA = x + y + 3z = 0$$

$$PB = 2x - y + z = 0$$

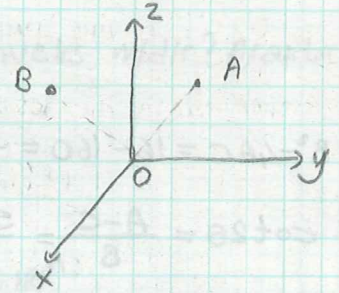
bilinmeyen sayısı - rank = $3 - 2 = 1$ keyfi sabite bağıl sonsuz çözümü vardır.

$$3x = -4z \Rightarrow x = -\frac{4}{3}z$$

$$\begin{array}{l} 2/ \quad 2x + 2y + 6z = 0 \\ -/ \quad 2x - y + z = 0 \end{array}$$

$$3y + 5z = 0 \Rightarrow y = -\frac{5z}{3} \quad z = a \text{ yazarak.}$$

$$P(-\frac{4}{3}a, -\frac{5}{3}a, a)$$



P noktasını, A ve B'nin oluşturduğu düzleme dik

değrultadaki bütün doğrular sağlar. $\vec{OP} = \lambda \vec{OA} \times \vec{OB}$

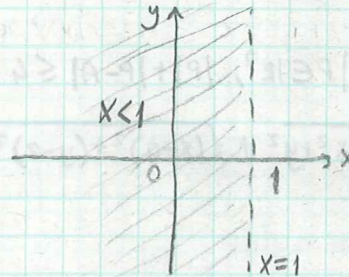
6- $S = \{P | P \in \mathbb{R}^2, |P| < |P-A|, A=(2,0)\}$

$$|P| < |P-A| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 < (x-2)^2 + y^2$$

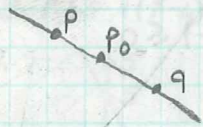
$$\Rightarrow x^2 + y^2 < x^2 + y^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow 4x < 4 \Rightarrow x < 1$$



Konveks küme tanımını hatırlayalım.

$0 < \lambda < 1$ $P, Q \in S$, $P=(x,y)$, $Q=(x',y')$ olsun.



$$P_0 = (1-\lambda)P + \lambda Q$$

$\lambda=0$ ise P_0, P ile çakışır.

$\lambda=1$ ise P_0, Q ile çakışır.

$0 < \lambda < 1$ ise aradaki noktaları verir.

$P_0 \in S \Rightarrow P_0$ noktalarının apsisi < 1 olmalı. Bunu göstermeliyiz.

$$P_0 = (1-\lambda)(x,y) + \lambda(x',y') = (\underbrace{(1-\lambda)x + \lambda x'}_{\text{apsis}}, \underbrace{(1-\lambda)y + \lambda y'}_{\text{ordinat}})$$

$$(1-\lambda)x + \lambda x' \text{ apsis} \Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda x' < (1-\lambda).1 + \lambda.1 \quad (P, Q \in S, x < 1 \text{ ve } x' < 1 \text{ (} x \text{ ve } x' \text{ yerine 1 yazarak)})$$

$$\Rightarrow 1-\lambda x + \lambda x' < 1-\lambda + \lambda < 1$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda x' < 1 \text{ olur. //}$$

0 halde P_0 noktalarının apsisi 1'den küştür ve S 'ye aittir.

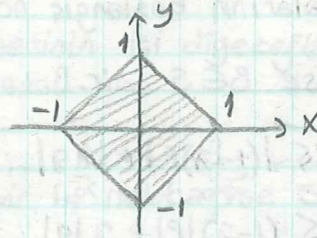
Bu küme konveks olur.

$$7-a) S = \{P \mid P \in \mathbb{R}^2, [P] = |x| + |y| \leq 1\}$$

463

$|x| + |y| \leq 1$ bir bağıntıdır.

$$\begin{aligned} x > 0, y > 0 &\Rightarrow x + y \leq 1 \\ x < 0, y > 0 &\Rightarrow -x + y \leq 1 \\ x < 0, y < 0 &\Rightarrow -x - y \leq 1 \\ x > 0, y < 0 &\Rightarrow x - y \leq 1 \end{aligned}$$



iki noktanın birleşimi daima küme içinde kaldığından, bu küre konvektir.

$0 < \lambda < 1$ olmak üzere $\forall P, Q \in S$ için $P_0 = (1-\lambda)P + \lambda Q$ noktalarının S 'nin elemanı olduğunu göstermeliyiz.

$P = (x, y)$ $Q = (x', y')$ olsun. apsis ordinat

$$P_0 = (1-\lambda)(x, y) + \lambda(x', y') = ((1-\lambda)x + \lambda x', (1-\lambda)y + \lambda y')$$

$|apsis| + |ordinat| \leq 1$ olmalıdır. Yani,

$$\left. \begin{aligned} P \in S, |x| + |y| &\leq 1 \\ Q \in S, |x'| + |y'| &\leq 1 \end{aligned} \right\} \text{ olmalıdır.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |(1-\lambda)x + \lambda x'| + |(1-\lambda)y + \lambda y'| &\stackrel{\geq 0}{\leq} \stackrel{\geq 0}{| (1-\lambda)x |} + \stackrel{\geq 0}{| \lambda x' |} + \stackrel{\geq 0}{| (1-\lambda)y |} + \stackrel{\geq 0}{| \lambda y' |} \\ &\leq (1-\lambda)|x| + \lambda|x'| + (1-\lambda)|y| + \lambda|y'| \\ &\leq (1-\lambda)(|x| + |y|) + \lambda(|x'| + |y'|) \\ &\stackrel{\leq 1}{\leq} (1-\lambda) \cdot 1 + \lambda \cdot 1 \\ &\leq 1 - \lambda + \lambda \leq 1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

O halde P_0 noktaları S nin elemanıdır. S konvektir.

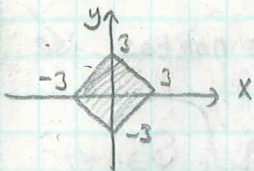
b) Şimdi gördüğümüz S kümesinin altında, $[P+Q] \leq [P] + [Q]$ yazılabilir mi?

$|P+Q| \leq |P| + |Q|$, $P = (x, y)$, $Q = (x', y')$ olsun.

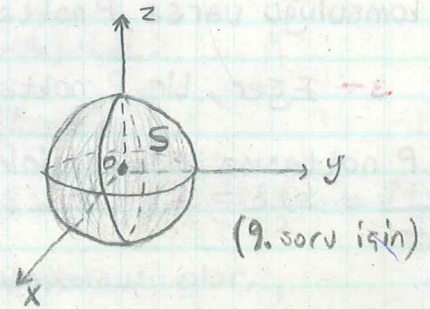
$$\left. \begin{aligned} [P] &= |x| + |y| \\ [Q] &= |x'| + |y'| \end{aligned} \right\} \Rightarrow [P] + [Q] = |x| + |y| + |x'| + |y'| \leq |x+x'| + |y+y'| \leq |P+Q|$$

$[P] + [Q]$ olur.

8- $\{P \mid P \in \mathbb{R}^2, |P| = |x| + |y| \leq 3\}$ konvektir.



Küre içinde ve üzerindeki noktalar kümesi S olsun.



9- $\forall P \in \mathbb{R}^3$ için $|P| \leq r$ r yarıçaplı küre.

$P, Q \in S$, $0 < \lambda < 1$ olmak üzere

$P_0 = (1-\lambda)P + \lambda Q$ noktalarının başlangıç noktasına olan uzaklığı r 'ye eşit ya da r 'den küçük ise $B \in S$ dir. Bakalım; $(|P| \leq r, |Q| \leq r)$

$$|P_0| = |(1-\lambda)P + \lambda Q| \leq \underbrace{|(1-\lambda)P|}_{\geq 0} + \underbrace{|\lambda Q|}_{\geq 0}$$

$$\leq (1-\lambda)|P| + \lambda|Q|$$

$$\leq (1-\lambda)r + \lambda r$$

$$\leq r - \lambda r + \lambda r \Rightarrow |P_0| \leq r \text{ o halde } S \text{ konvektir.}$$

4.2. TOPOLOJİK KAVRAMLAR ($\mathbb{R}^n$ nin topolojisi)

TANIM 4.2.1.

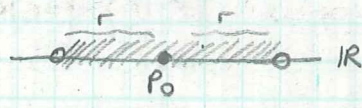
$P_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası ve $\delta \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı verilmiş olsun.

$$N = \{P \mid P \in \mathbb{R}^n, |P - P_0| < \delta\}$$

kümesine P_0 merkezli ve δ yarıçaplı açık küresel komşuluk denir.

Daha genel olarak, bir U kümesi P_0 noktasının bir küresel açık komşuluğunu içeriyorsa, U kümesine P_0 noktasının bir komşuluğu denir.

Bu $\mathbb{R}^2$ de P_0 noktasını kapsayan, P_0 merkezli ve δ yarıçaplı

çemberin içi; $\mathbb{R}$ 'de ise P_0 noktasını kapsayan  şeklinde bir açıktır. 

TANIM 4.2.2.

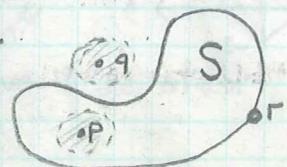
Bir S kümesi ve P noktası verilmiş olsun.

1- Eğer S kümesi, P noktasının bir komşuluğu ise P noktasına, S kümesinin bir iç noktası,

2- Eğer $P \notin S$ ise ve P noktasının S kümesiyle arakesiti boş olan bir komşuluğu varsa, P noktasına S kümesinin bir dış noktası,

3- Eğer, bir P noktası, S kümesinin ne iç, ne de dış noktası ise P noktasına S kümesinin bir sınır noktası denir.

r : sınır nokta
 P : iç nokta, A : dış nokta



Sınır noktası kümenin elemanı olabileceği gibi, kümenin elemanı olmayabilir de.

S kümesinin sınır noktalarını ∂S ile göstereceğiz. S kümesi, iç noktalarından oluşuyorsa buna S kümesinin içi diyeceğiz ve $\overset{\circ}{S}$ ile göstereceğiz.

TANIM 4.2.3.

S kümesinin her noktası bir iç nokta ise S 'ye açık küme, eğer S kümesine ait olmayan her nokta S 'nin bir dış noktası ise S 'ye kapalı küme denir. S kümesinin yine kendisine ait olan sınır noktası yoksa, S 'ye açık küme, S kümesinin her sınır noktası yine S kümesine aitse S 'ye kapalı küme denir. Bir S kümesinin kapanışı, bu kümeye sınır noktalarının katılmasıyla elde edilir ve $\bar{S}$ ile gösterilir.

$$\bar{S} = S \cup \partial S \quad \text{olur.}$$

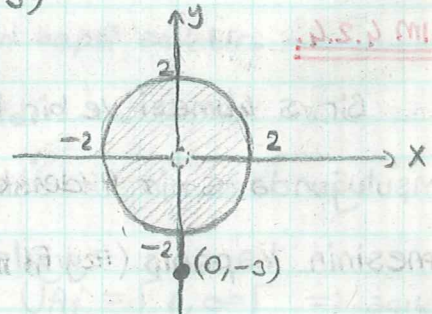
Örnek 4.2.1// $S = \{P \mid P \in \mathbb{R}^2, 0 < |P| \leq 2\} \cup (0, -3)$

sınır, $\partial S = \{P \mid P \in \mathbb{R}^2, |P| = 2\} \cup (0, 0) \cup (0, -3)$

iç, $\overset{\circ}{S} = \{P \mid P \in \mathbb{R}^2, 0 < |P| < 2\}$

dış, $(0, -3)$

kapanışı $\bar{S} = \{P \mid P \in \mathbb{R}^2, 0 \leq |P| \leq 2\} \cup (0, -3)$



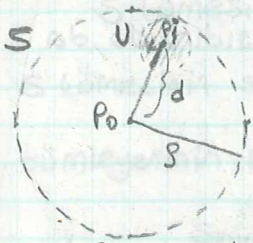
Teorem 4.2.1. Her açık küresel kompaktlık bir açık kümedir.

İspat// $g \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$S = \{P \mid P \in \mathbb{R}^n, |P - P_0| < g\} \quad (\text{küresel açık kompaktlık})$$

S kümesinin bir açık küme olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için

$\forall P_1 \in S$ 'nin bir iç noktası olduğunu göstermeliyiz. Gösterelim;



$d = |P_1 - P_0|$ diyelim.

$$k = \frac{g-d}{2}, \quad U \subset S \text{ dir.}$$

$P \in U$ alalım. $\Rightarrow |P - P_1| < k$

$$|P - P_0| = |P - P_1 + P_1 - P_0| \leq |P - P_1| + |P_1 - P_0|$$

$\forall P \in U$ için aynı
şeyi söyleyebiliriz.

$$\leq k + d \leq \frac{g-d}{2} + d = \frac{g+d}{2} = \frac{g+g}{2} = g$$

O halde ispat tamamlanmış olur.

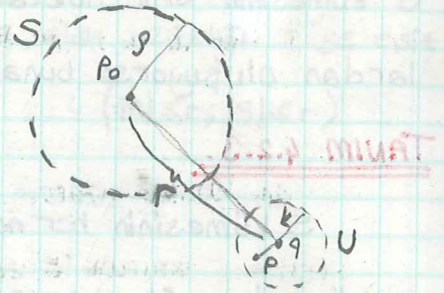
Teorem 4.2.2. $|q - p_0| > \delta$ koşulunu sağlayan q noktaları, S nin dış noktalarıdır.

İspat, $S = \{P \mid P \in \mathbb{R}^n, |P - p_0| < \delta\}$

$|q - p_0| = r > \delta$, $k = \frac{r - \delta}{2}$ seçelim.

q merkezli ve k yarıçaplı komşuluk U olsun.

$S \cap U = \emptyset$ olduğunu göstermeliyiz.



Bunun için $\forall P \in U$ noktasının p_0 noktasına olan uzaklığının δ 'dan büyük olduğunu göstermek yeter. Gösterelim;

$$\Rightarrow |P - p_0| = |P - q + q - p_0| = |(q - p_0) - (q - P)| \geq |q - p_0| - |q - P|$$

$(|x - y| \geq |x| - |y|)$ Alıştırma 2 den

$\forall P \in U$ için $|P - q| < k$ dir.

$\forall P \in U$, $|P - q| > \delta$ olduğundan

$$\geq |q - p_0| - |q - P|$$

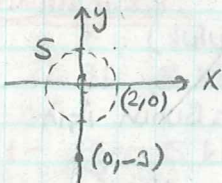
$$|P - p_0| \geq r - k$$

$$\geq r - \frac{r - \delta}{2} \geq \frac{r + \delta}{2} > \frac{\delta + \delta}{2} > \delta$$

$U \cap S = \emptyset$ dir. O halde her q noktası S kümesinin bir dış noktasıdır.

TANIM 4.2.4.

Bir S kümesi ve bir P noktası verilmiş olsun. Eğer P nin her komşuluğunda S nin P 'den başka en az bir elemanı varsa P 'ye S kümesinin kapanış (=yığılma = limit = türev) noktası denir. Karşıt olarak eğer $P \in S$ ise ve bu noktanın $S - \{P\}$ ile arakesiti boş olan bir komşuluğu varsa bu noktaya S kümesinin bir ayrık noktası denir.



Örneğin, $(0, -3)$ noktası S 'nin bir ayrık noktasıdır.

$$S \cap (0, -3) = \emptyset \text{ olduğu için.}$$

Bir kümenin herhangi bir noktası ya kapanış noktasıdır. Ya da ayrık noktasıdır.

Açık Kümelerin Özellikleri

- 1- $\mathbb{R}^n$ de $\emptyset$ açıktır. ($\emptyset = f_i$) ($E = \mathbb{R}^n \Rightarrow$ tümleyeni $\emptyset$ dir.)
- 2- Herhangi sayıda (sonlu, sonsuz) açıkların birleşimi açıktır.
- 3- Sonlu sayıda açıkların kesişimi yine açıktır.

2- Yani $(A_i)_{i \in I}$ aqıklar ailesi verildiginde $\bigcup_{i \in I} A_i$ aqiktir. (I herhangi sayıda) 467

3- (Fakat sonsuz sayıdaki aqıkların kesisimi aqık olmayabilir.)

Yani her I için $(A_i)_{i \in I}$ aqık kümeler ailesi için $\bigcap_{i \in I} A_i$ aqiktir. (I', sonlu)

Kapalı Kümelerin Özellikleri

1- $\mathbb{R}^n$ de $\emptyset$ kapalıdır.

2- Herhangi sayıda (sonlu, sonsuz) kapalıların kesisimi kapalıdır.

3- Sonlu sayıda kapalıların birleşimi kapalıdır fakat sonsuz sayıda kapalıların birleşimi kapalı olmayabilir.

Bu özellikleri, aqıkların ve kapalıların tümleyeni özelliğinden gösterebiliriz.

i- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

ii- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

iii- $\emptyset^c = \mathbb{R}^n = E$ ve $E^c = \emptyset$ dir.

$$A^c = E \setminus A = E - A$$

$A_i =]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[$, $i \in \mathbb{N}^+$ olsun. A_i ailelerinin hepsi aqıktır.

$\bigcap_{i \in \mathbb{N}^+} A_i = \{0\}$ bir elemanlı küme aqık değildir.

$$A_i = [i, 1+i], i \in \mathbb{N}^+,$$

$$A_1 = [1, 2], A_2 = [2, 3], A_3 = [3, 4], \dots \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} A_i = [1, \infty[\Rightarrow \text{aqıktır.}$$

O halde sonsuz tane kapalıların birleşimi kapalı değildir.

Bir kümenin aqık olması için gerekli ve yeterli koşul bu kümenin tümleyenin kapalı olmasıdır.

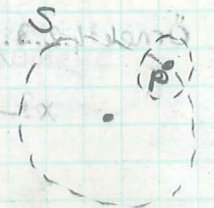
Bir S kümesi içi, S de bulunan en büyük alt aqık kümedir.

S kümesinin kapanışı, S'yi kapsayan en küçük kapalı kümedir.

S kümesinin sınırı daima kapalı kümedir ve S'nin kapanışı ile S'nin tümleyenin kapanışının kesisimi olarak ifade edilebilir.

$$\text{Sınırı} \Rightarrow \partial S = \bar{S} \setminus S^\circ \text{ dir.}$$

Bir P noktasının S kümesinin sınırına ait olması için gerekli ve yeterli koşul P'nin her komşuluğunun S'ye ait olan ve ait olmayan noktalar içermesidir.

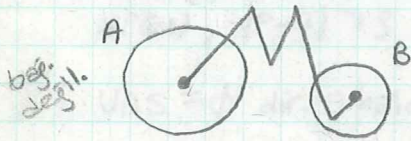


TANIM 4.2.5.

$S \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilmiş olsun. Eger S kümesi boş olmayan ve biri diğerinin sınır noktalarını kapsamayan iki A ve B kümelerine ayrılamıyorsa, S kümesine bağlantılı küme denir. Eger bir küme bağlantılı değilse, yani boş olmayan ve birinin kapanışı diğerinden ayrık olan A ve B kümelerinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa S kümesine bağlantılı olmayan küme denir.

Eger S kümesi boş olmayan ve birinin kapanışı diğerinden ayrık olan ve iki A ve B kümelerinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa, S kümesi bağlantılı değildir denir.

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \quad \bar{A} \cap B = \emptyset, \bar{B} \cap A = \emptyset \quad S = A \cup B$$



Eger bir S kümesinin herhangi bir noktası bütün noktaları S 'ye ait sonlu sayıda, kırık eğri

parçalarından oluşan bir yol yardımıyla birleştiriliyorsa S 'ye bağlantılı küme denir.

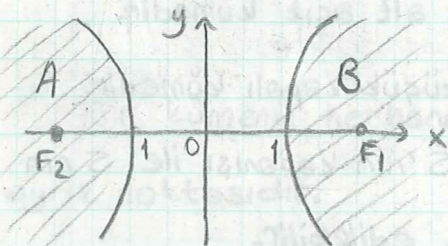
G ve H bir X uzayının açık alt kümeleri olsunlar.

$$1- S \subset (G \cup H) \Rightarrow S = (S \cap G) \cup (S \cap H)$$

$$2- (G \cap H) \subset S^c \Rightarrow (S \cap G) \cap (S \cap H) = \emptyset$$

koşulları sağlanıyorsa S bağlantılı değildir. (Topolojik tanımdır.)

Örnek 4.2.2 // $H = \{(x,y) \mid x^2 - y^2 \geq 1\}$ veriliyor. Bu kümenin bağlantılı olup olmadığını araştırınız.



İkizkenar hiperbol.

$$H = A \cup B$$

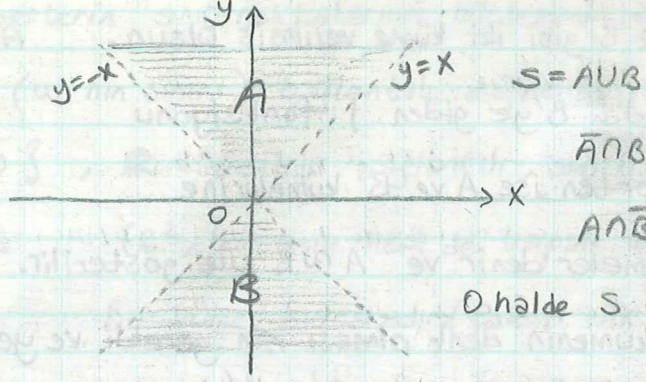
$$\bar{A} \cap B = \emptyset, A \cap \bar{B} = \emptyset \quad \text{ayrık kümelerdir.}$$

O halde H kümesi bağlantılı değildir.

Örnek 4.2.3 // $S = \{(x,y) \mid x^2 - y^2 < 0\}$ kümesi bağlantılı mıdır? Araştırınız.

$$x^2 - y^2 < 0 \Rightarrow |x| < |y| \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
 x > 0, y > 0 &\Rightarrow x < y \\
 x < 0, y > 0 &\Rightarrow -x < y \\
 x < 0, y < 0 &\Rightarrow -x < -y \\
 x > 0, y < 0 &\Rightarrow x < -y
 \end{aligned}$$

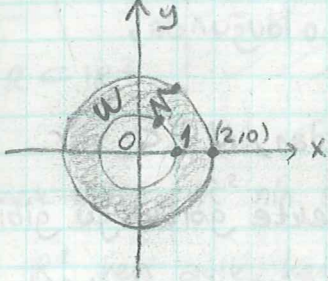


$$\bar{A} \cap B = \emptyset$$

$$A \cap \bar{B} = \emptyset$$

O halde S bağlantılı değil.

Örnek 4.2.4. // $W = \{P \mid P \in \mathbb{R}^2, 1 \leq |P| \leq 2\}$ kümesi bağlantılı mıdır?



$$\bar{A} \cap B = \emptyset \quad \bar{B} \cap A = \emptyset$$

$W \neq A \cup B$ iki kümenin birleşimi olarak

yazılamadığından W kümesi bağlantılıdır.

Örnek 4.2.5. // $S = \{a, d, e\}$, $G = \{a, b, c\}$, $H = \{c, d, e\}$ biçiminde veriliyor.

S kümesi bağlantılı mıdır, değil midir?

$$S \cap G = \{a\} \quad S \cap H = \{d, e\} \quad G \text{ ve } H \text{ kümeleri için,}$$

$$1 - S \subset (G \cup H) \Rightarrow S = (S \cap G) \cup (S \cap H) \quad \text{söğlenir.}$$

$$2 - (G \cap H) \subset S^c \Rightarrow (S \cap G) \cap (S \cap H) = \emptyset$$

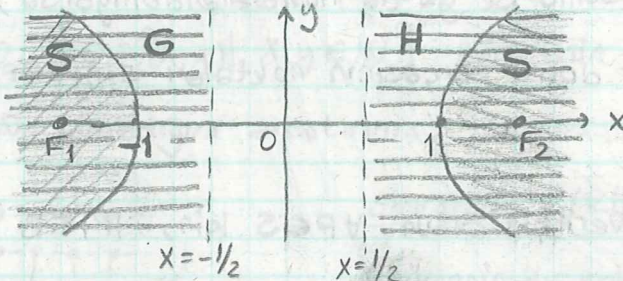
$$\begin{aligned} &\parallel \parallel \parallel \parallel \\ c &\subset bc \Rightarrow \{a\} \cap \{d, e\} = \emptyset \quad \text{söğlenir.} \end{aligned}$$

O halde S, bağlantılı değildir.

Örnek 4.2.6. // $S = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 \geq 1\}$

$$G = \{(x, y) \mid x < -\frac{1}{2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$H = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} < x, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{İse S kümesi bağlantılı mıdır?}$$



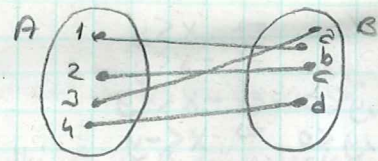
S kümesi bağlantılı değildir.

Kümelerde Sonluluk ve Sınırlılık

Eğer bir küme sonlu sayıda elemanı kapsıyorsa, bu kümeye

sonlu küme, aksi taktirde sonsuz küme denir.

A ve B gibi iki küme verilmiş olsun.



Eğer A'dan B'ye giden f fonksiyonu

1:1 ve örten ise A ve B kümelerine

denk kümeler denir ve $A \sim B$ ile gösterilir.

İki kümenin denk olması için gerekli ve yeterli koşul, eleman sayılarının aynı olmasıdır.

Örneğin; $\mathbb{N}$: doğal sayılar, $\mathbb{C}$: çift sayılar kümesi olduğunda,

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$n \rightarrow f(n) = 2n \text{ fonksiyonu 1:1 ve örten olduğundan, } \mathbb{N} \sim \mathbb{C} \text{ dir.}$$

Her iki kümenin eleman sayısı sonsuzdur. Bu örnekte görüldüğü gibi sonsuz elemanı olan $\mathbb{N}$ kümesi, özalt kümesi olan $\mathbb{C}$ kümesine denktir.

İşte bu özellik sonsuz kümeleri karakterize eder. Bunun sonucu olarak aşağıdaki tanımlı verebiliriz.

TANIM 4.2.6.

Eğer bir küme özalt kümesine denk ise bu kümeye sonsuz küme, aksi halde sonlu küme denir.

TANIM 4.2.7.

Bir $S \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilmiş olsun. Eğer S kümesi, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesine denk ise S kümesine numaralanabilir küme denir.

TANIM 4.2.8.

Eğer bir S kümesi sonlu ise ya da numaralanabiliyorsa, S kümesine sayılabilir küme denir. (Bir doğru parçasının noktaları sayılamaz, numaralanamaz.)

TANIM 4.2.9.

Bir $S \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilmiş olsun. $\forall p \in S$ için, $|P| < B$, $B \in \mathbb{R}^+$ sonlu sayısı varsa, S kümesine sınırlı küme denir. Eğer S kümesi sınırlı değilse, S 'ye sınırsız küme denir.

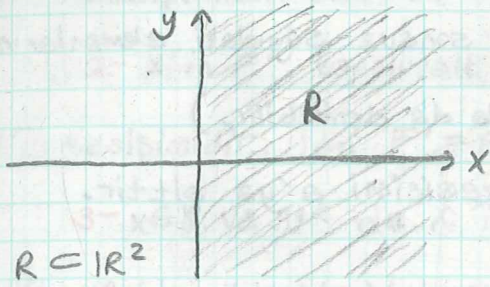
Örnek 4.2.2'deki küme sınırsızdır, fakat bir sınırı vardır.

Örnek 4.2.4. sınırlıdır, kapalıdır, bağlantılıdır. $|P| = 1$ ve $|P| = 2$ sınırıdır.

$r=1$ ve $r=2$ olan çemberlerin sınır noktalarının birleşimi olarak mihi 471

yazılabildiğinde ∂W 'nın (W 'nin sınırı) bağlantılı değildir.

Örnek 4.2.7// $R = \{(x,y) \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{R}^2$ kümesinin bağlantılı, sınırlı, kapalı olup olmadığını araştırınız. ($\mathbb{R}^2$, hem açık hem de kapalı kümedir.)



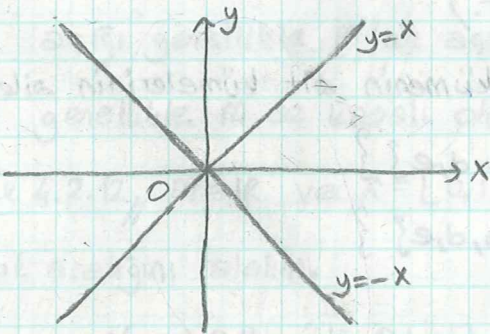
Bu küme sınırsızdır. (fakat bir sınırı vardır.) kapalı kümedir. Bağlantılıdır çünkü, $R = A \cup B$ yazılamaz. ($A \neq \emptyset$ $B \neq \emptyset$ $\bar{A} \cap B = \emptyset$, $\bar{B} \cap A = \emptyset$ olduğundan.)

Örnek 4.2.8// $\mathbb{R}^2$ 'nin bağlantılı sınırlı, kapalı olup olmadığını araştırınız.

$\mathbb{R}^2$ hem açık, hem kapalıdır. Sınırı $\emptyset$ dir. (tümleyeni olduğundan)

Sınırsızdır, bağlantılıdır.

Örnek 4.2.9// $T = \{(x,y) \mid |x|=|y|\}$ kapalı, bağlantılı, sınırlı olup olmadığını araştırınız.



$$x < 0, y < 0 \Rightarrow -y = -x \Rightarrow y = x$$

$$x < 0, y > 0 \Rightarrow y = -x$$

$$x > 0, y > 0 \Rightarrow y = x$$

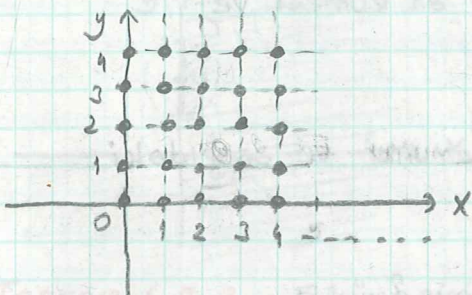
$$x > 0, y < 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow y = -x$$

Her noktası sınır noktası olduğundan

kapalıdır. Sınırsızdır ama kümenin sınırı vardır. (Her noktasının bir yakını noktasına

olan uzaklığı sonlu olmadığından.) Bağlantılıdır. (sınır noktaları üzerinde hangi noktaları alırsak birbirleriyle bağlanır.) Sayılabilir.

Örnek 4.2.10// $Q = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N}\}$ kümesinin ; kapalı, bağlantılı ve sınırlı küme olup olmadığını araştırınız. 11.8.3 mihi



Sınırsızdır. (Kümeye dahil olmayan her nokta

kümenin dış noktası ise kapalı, her noktası

iç nokta ise açık kümedir.)

Kompaktlığıyla, kümenin kesişimi $\emptyset$ ise 0 nokta

dış noktadır. 0 halde kapalı kümedir. Bağlantılı değildir. Sınırı yine kendisidir.

Sayılabilirdir. ($\mathbb{N}$ ile eşlenebildiği için.)

TANIM. 4.2.10.

M bir küme,

$$\mathcal{a} = \{A_i \mid i \in I, I \subset \mathbb{N}\}$$

da, aşağıdaki aksiyomları sağlayan M 'nin alt kümelerinin bir ailesi olsun.

- i- $\bigcup_{i \in I'} A_i \in \mathcal{a}$, $I' \subset I$ dir. (Yani sonlu ya da sonsuz sayıdaki elemanların birleşimi yine $\mathcal{a}$ 'ya aittir. Herhangi sayıda da denilebilir.)
- ii- $\mathcal{a}$ 'nın her sonlu sayıdaki elemanların kesisimini $\mathcal{a}$ 'ya aittir. (Yani $\bigcap_{i \in I'} A_i \in \mathcal{a}$, I' sonludur.)
- iii- $\emptyset \in \mathcal{a}$ ve $M \in \mathcal{a}$ dir.

Bu taktirde $\mathcal{a}$ 'ya M üstünde bir topolojik yapı, ya da kısaca topoloji denir. $(M, \mathcal{a})$ ikilisine topolojik uzay, M kümesinin her elemanına bir nokta, ve $\mathcal{a}$ kümesinin her elemanına da M nin bir açık alt kümesi denir. (M nin alt kümelerinden olan $\mathcal{a}$ kümesi öz özelliği de sağlarsa, $\mathcal{a}$ ya M üzerinde topoloji denir.)

Örnek 4.2.11, $M = \{a, b, c, d, e\}$ olsun. Bu kümenin alt kümelerinin ailesi de

$$\mathcal{a}_1 = \{M, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

$$\mathcal{a}_2 = \{M, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}$$

$$\mathcal{a}_3 = \{M, \emptyset, \{a\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

Sadece $\mathcal{a}_1$, M üstünde topolojidir. Diğerleri değildir.

M bir küme $\mathcal{a}$ ve $\mathcal{a}'$, M üzerinde iki topoloji olsun. $(M, \mathcal{a})$ ve $(M, \mathcal{a}')$, iki ayrı topolojik uzay olduğunu gösterelim.

TANIM 4.2.11.

$(M, \mathcal{a})$ bir topolojik uzay, X 'de M nin bir alt kümesi ve

$$\mathcal{a} = \{A_i \mid i \in I\}$$

da, M 'nin açıklar ailesi olsun. Açıklar aksiyomunu ve aşağıdaki özellikleri sağlayan,

$$\mathcal{a}_X = \{A'_i \mid i \in I \text{ öyle ki } A'_i = A_i \cap X\}$$

TANIM. 4.2.10.

M bir küme,

$$\mathcal{a} = \{A_i \mid i \in I, I \subset \mathbb{N}\}$$

da, aşağıdaki aksiyomları sağlayan M 'nin alt kümelerinin bir ailesi olsun.

- i- $\bigcup_{i \in I'} A_i \in \mathcal{a}$, $I' \subset I$ dir. (Yani sonlu ya da sonsuz sayıdaki elemanların birleşimi yine $\mathcal{a}$ 'ya aittir. Herhangi sayıda da denilebilir.)
- ii- $\mathcal{a}$ 'nın her sonlu sayıdaki elemanların kesişimi $\mathcal{a}$ 'ya aittir. (Yani $\bigcap_{i \in I'} A_i \in \mathcal{a}$, I' sonludur.)
- iii- $\emptyset \in \mathcal{a}$ ve $M \in \mathcal{a}$ dir.

Bu taktirde $\mathcal{a}$ 'ya M üstünde bir topolojik yapı, ya da kısaca topoloji denir. $(M, \mathcal{a})$ ikilisine topolojik uzay, M kümesinin her elemanına bir nokta, ve $\mathcal{a}$ kümesinin her elemanına da M nin bir açık alt kümesi denir. (M nin alt kümelerinden olan $\mathcal{a}$ kümesi $\mathcal{O}$ özelliği de sağlarsa, $\mathcal{a}$ ya M üzerinde topoloji denir.)

Örnek 4.2.11, $M = \{a, b, c, d, e\}$ olsun. Bu kümenin alt kümelerinin ailesi de

$$\mathcal{a}_1 = \{M, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

$$\mathcal{a}_2 = \{M, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}$$

$$\mathcal{a}_3 = \{M, \emptyset, \{a\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

Sadece $\mathcal{a}_1$, M üstünde topolojidir. Diğerleri değildir.

M bir küme $\mathcal{a}$ ve $\mathcal{a}'$, M üzerinde iki topoloji olsun. $(M, \mathcal{a})$ ve $(M, \mathcal{a}')$, iki ayrı topolojik uzay olduğunu gösterelim.

TANIM 4.2.11.

$(M, \mathcal{a})$ bir topolojik uzay, X 'de M nin bir alt kümesi ve

$$\mathcal{a} = \{A_i \mid i \in I\}$$

da, M 'nin açıklar ailesi olsun. Açıklar aksiyomunun ve aşağıdaki özellikleri sağlayan,

$$\mathcal{a}_X = \{A'_i \mid i \in I \text{ öyle ki } A'_i = A_i \cap X\}$$

kümeler ailesine, X üzerinde bünyesel topoloji ya da indirgenen topoloji denir ve A'_i ye de, A_i nin X 'deki izi denir. 493

1- X in $\forall A_i$ açık alt kümesi, M 'nin bir açık alt kümesi ile X 'in kesişimidir. Yani $A'_i = A_i \cap X$ dir.

2- X 'in F' kapalı alt kümesi, M 'nin bir kapalı alt kümesi ile X 'in kesişimidir. Yani $F' = F \cap X$ (F, M 'de kapalıdır.)

3- $x \in X$ ve U' de X in x üzerinde bünyesel topolojiye göre kompuluğu olsun. X 'in M 'de böyle bir V kompuluğu vardır ki, $V' = V \cap X$ dir.

Uyarı //

I- " M bir topolojik uzay ve X 'de M nin bir alt uzayı olsun" demek X kümesi bünyesel topoloji ile donatılmış demektir.

Uyarı //

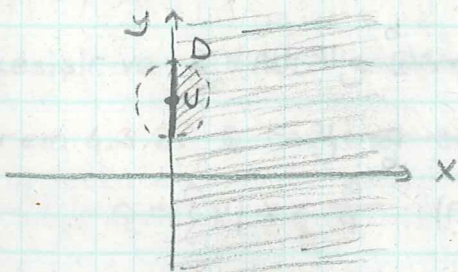
II- M bir topolojik uzay ve X 'de M 'nin bir alt uzayı ise X 'in A' aşığı genellikle M 'de açık olmayabilir. X 'deki F' kapalıları genellikle M de kapalı olmayabilir.

Örnek 4.2.12 // $M = \mathbb{R}$ ve $X = [0, 1]$ kapalı aralığı olsun. $A =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ açık aralığını alalım.

$A' = A \cap X$ idi. O halde $A' = [0, \frac{1}{2}[$, bünyesel topolojiye göre açıktır ama A' , $\mathbb{R}$ 'de açık değildir.

Örnek 4.2.13 // $S = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$

ve D kümesi, merkezi O_y eksen üzerinde olan açık bir küresel kompuluk olsun.



$U = D \cap S$ bakalım.

U kümesi, bünyesel topolojiye göre açıktır.

Fakat U kümesi $\mathbb{R}^2$ de açık değildir.

Teorem 4.2.3. S kümesinin bağlantılı olmaması için gerekli ve yeterli koşul, S 'nin A ve B gibi boş olmayan ayrık ve S 'deki bünyesel

topolojiye göre açık olan iki kümenin birleşimine eşit olmasıdır. Kısaca ;

$$S \text{ bağlantılı değildir} \Leftrightarrow A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \quad \bar{A} \cap B = \emptyset, \bar{B} \cap A = \emptyset$$

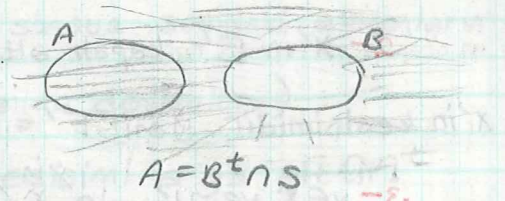
A ve B bünyesel topolojiye göre açık $S = A \cup B$ dir.

İspat// $\Rightarrow$: S bağlantılı olmasın. O zaman tanımdan $\bar{A} \cap B = \emptyset, \bar{B} \cap A = \emptyset$

olacak biçimde $S = A \cup B$ dir.

$$A = S \cap B^c$$

$$B = S \cap A^c$$



Bir kümenin kapanışı daima kapalı küme olduğundan

$\bar{B}^c$ açıktır, $\bar{A}^c$ açıktır. A ve B bünyesel topolojiye göre açıktır.

$A \subset \bar{A}^c$, $B \subset \bar{B}^c$ dir. ($\bar{A}$: A'nın kapanışı)

$\Leftarrow$: $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \quad \bar{A} \cap B = \emptyset, \bar{B} \cap A = \emptyset$ ve $S = A \cup B$ ise

tanımdan dolayı S bağlantılı değildir.

TANIM 4.2.12.

Bir küme kendinden ve boş kümeden başka, bünyesel topolojiye göre hem açık hem de kapalı hiçbir alt kümeyi kapsamazsa, bu kümeye bağlantılı küme denir.

($A \neq S$ ve $B \neq S$ olduğundan, Teorem 4.2-3 'deki S, bağlantılı değildir.)

4.3. Sıralama ve En Küçük Üst Sınır Özellikleri

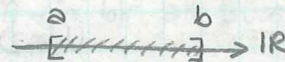
$\mathbb{R}$ 'de $\leq$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

i - $a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq b$ olsun. $a < b$ veya $b < a$ dir.

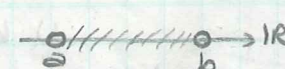
ii - $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, c \in \mathbb{R}$

iii - $a \leq b$ ve $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ dir.

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$$



$$I =]a, b[= \{x \mid a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$$

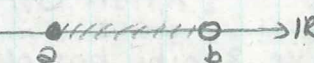


$[a, b]$ kümesi $]a, b[$ nin kapanışındır.

$\partial I = \{a, b\}$ olur.

sınır

$$[a, b[= \{x \mid a \leq x < b, x \in \mathbb{R}\}$$



$$U = \{x \mid c \leq x, x \in \mathbb{R}\}$$

~~0~~

$\mathbb{R}$

495

TANIM 4.3.1.

$S \subset \mathbb{R}$ verilsin. Eğer $\forall x \in S$ için $x \leq M$ olacak biçimde bir M sayısı varsa, S kümesi üstten (yukarıdan) sınırlıdır, eğer $\forall x \in S$ için $m \leq x$ olacak biçimde m sayısı varsa S kümesi alttan sınırlıdır denir. Hem alttan, hem üstten sınırlı kümeye sınırlıdır denir.

$$S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset \quad EKÜS = \sup \quad EBAS = \inf$$

Bir S kümesinin maksimumu $\sup S$ ile gösterilir.

$$\text{Örneğin, } S = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 9\} \quad S = [-3, 3]$$

$$\sup S = 3 \quad \underset{ig}{S} = \{x \mid x \in \mathbb{R} -3 < x < 3\} \quad (\text{sınırlar atılarak bulunur.})$$

$\underset{ig}{S} = I$ dersek, bu kümenin maksimumu vardır ama bu kümeye dahil değildir.

Teorem 4.3.1. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi bağlantılıdır.

İspat // $\mathbb{R}$ bağlantılı olmasın.

$\forall a \in A$ noktasının küresel komşuluğu A' 'da olan A kümesini ve

$\forall b \in B$ noktasının küresel komşuluğu B' 'de olan B kümesini alalım.

Öyle ki, $\bar{A} \cap B = \emptyset \quad \bar{B} \cap A = \emptyset, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ koşullarını sağlayan A ve B

kümelerini alalım. $R = A \cup B$ dir. (Bağlantılı olmadığından)

$a < b, A_0 = \{a_0 \in A \mid a < a_0 < b, a \in A, b \in B\}$ kümesini tanımlayalım.

$\sup A_0 = c$ olsun.

$$\leftarrow \begin{array}{ccc} a & \text{---} c \text{---} & b \end{array} \rightarrow \mathbb{R}$$

c , hem A , hem de B kümesinin sınır noktasıdır. Bu ise $\bar{A} \cap B = \emptyset$ ile

kesişir ve $R \neq A \cup B$ yazılır. O halde $\mathbb{R}$ bağlantılıdır.

Teorem 4.3.2. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi bağlantılı değildir.

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q} \quad (p, q) = 1, q \neq 0, p, q \in \mathbb{Z}\right\}$$

İspat // $\mathbb{Q}$ kümesini bünyesel topoloji ile donatalım.

$a < b, a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, bir A kümesini :

$$U = \{x \mid c < x, x \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{\text{S}} \mathbb{R}$$

TANIM 4.3.1.

$S \subset \mathbb{R}$ verilsin. Eğer $\forall x \in S$ için $x \leq M$ olacak biçimde bir M sayısı varsa, S kümesi üstten (yukarıdan) sınırlıdır, eğer $\forall x \in S$ için $m \leq x$ olacak biçimde m sayısı varsa S kümesi alttan sınırlıdır denir. Hem alttan, hem üstten sınırlı kümeye sınırlıdır denir.

$$S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset \quad \text{EKÜS} = \sup \quad \text{EBAS} = \inf$$

Bir S kümesinin maksimumu $\sup S$ ile gösterilir.

$$\text{Örneğin, } S = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 9\} \quad S = [-3, 3]$$

$$\sup S = 3, \quad \underset{\text{İşi}}{S} = \{x \mid x \in \mathbb{R} -3 < x < 3\} \quad (\text{sınırlar atılarak bulunur.})$$

$\underset{\text{İşi}}{S} = I$ dersek, bu kümenin maksimumu vardır ama bu kümeye dahil değildir.

Teorem 4.3.1. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi bağlantılıdır.

İspat // $\mathbb{R}$ bağlantılı olmasın.

$\forall a \in A$ noktasının küresel komşuluğu A 'da olan A kümesini ve

$\forall b \in B$ noktasının küresel komşuluğu B 'de olan B kümesini alalım.

Öyle ki, $\bar{A} \cap B = \emptyset, \bar{B} \cap A = \emptyset, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ koşullarını sağlayacak A ve B

kümelerini alalım. $R = A \cup B$ dir. (Bağlantılı olmadığından)

$a < b, A_0 = \{a_0 \in A \mid a < a_0 < b, a \in A, b \in B\}$ kümesini tanımlayalım.

$\sup A_0 = c$ olsun.

$$\leftarrow \begin{array}{ccc} a & \text{---} & c \\ & \text{---} & b \end{array} \rightarrow \mathbb{R}$$

c , hem A , hem de B kümesinin sınır noktasıdır. Bu ise $\bar{A} \cap B = \emptyset$ ile

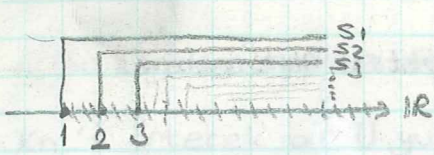
kesişir ve $R \neq A \cup B$ yazılır. O halde $\mathbb{R}$ bağlantılıdır.

Teorem 4.3.2. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi bağlantılı değildir.

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q} \quad (p, q) = 1, q \neq 0, p, q \in \mathbb{Z}\right\}$$

İspat // $\mathbb{Q}$ kümesini bünyesel topoloji ile donatalım.

$a < b, a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, bir A kümesini :



hepsiye ait bir nokta var mıdır?

477

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} S_n = \emptyset \text{ yoktur.}$$

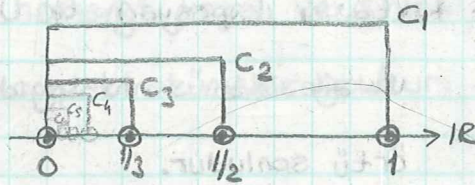
Bu kümeler kapalıdır, fakat sınırlı değildir. (Başlangıç noktasına olan uzaklığı sınırlı olmadığından.) O halde bu kümeler iç içe kümeler sistemini oluşturmazlar.

2.Örnek // $C_n = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+\}$, C_n 'ler iç içe kümeler sistemini oluşturur mu?

$$0 < x < \frac{1}{1} < 1$$

$$0 < x < \frac{1}{2}$$

$$0 < x < \frac{1}{n}$$



$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} C_n = \emptyset \text{ kümeler sınırlıdır fakat kapalı değildir.}$$

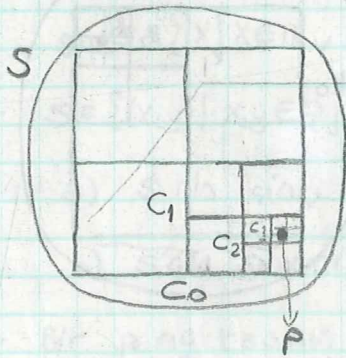
O halde C_n 'ler iç içe kümeler sistemini oluşturmazlar.

Teorem 4.4.1. (Balzano-Weierstrass)

Sınırlı ve sonsuz elemanlı her küme en az bir yığılma (kapanıp, limit) noktası kapsar.

İspat // Bu teoremi $\mathbb{R}^2$ de ispatlayalım.

Sınırlı ve sonsuz elemanlı küme S olsun. S kümesi sınırlı olduğundan S nin kapsadığı (C_0) bir çember veya kare vardır. Bu karenin eleman sayısı da

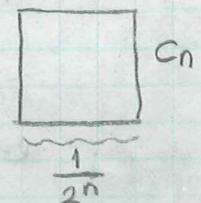


sonsuzdur. Şimdi bu kareyi dört eşit kareye bölelim. Bu dört kareden en az biri hipotezden, sonsuz elemanı kapsar. Sonsuz elemanlısına (C_1) diyelim. Tekrar C_1 karesini dört eşit kareye bölelim. Dört eşit kareden en az biri sonsuz

elemanlıdır. Sonsuz elemanlı olma (C_2) diyelim. C_2 karesini dört eşit kareye bölelim ve böyle devam edelim. (C_n) karesine gelelim.

C_0 karesinin bir kenar uzunluğu L olsun. C_n karesinin bir kenar uzunluğu $\frac{1}{2^n}$ olur.

$$\frac{L}{2^n} < \frac{\epsilon}{2} \text{ yarıçaplı yuvarın içine düşürebiliriz.}$$



0 halde, p noktası bir yığılma (limit, kapanış) noktası olur.

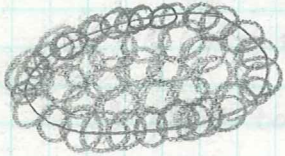
TANIM 4.4.2.

$A \subset X$ ve X 'in açık alt kümelerinin ailesi,

$$\mathcal{A} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

olsun. A kümesinin $\mathcal{A}$ örtüsü diye, açıklar ailesine denir. Öyle ki, bunların birleşimi A 'yı örter. (kapsar) Yani, $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ dir.

Burada $\forall x \in A$ noktasını kapsayan bir U_i açığı (yuvarı) vardır demektir.



$\mathcal{A}$ ailesinde sonlu sayıda küme varsa, (sonlu U_i varsa) örtü sonludur.

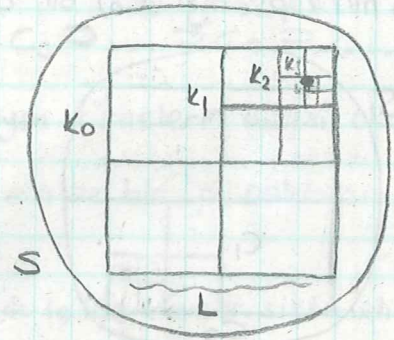
Teorem 4.4.2. (Heine - Bonel) Örtme Teoremi.

$S \subset \mathbb{R}^n$ kapalı ve sınırlı bir alt küme olsun. $U_1, U_2, \dots, U_n$ de S 'nin bir açık örteni olsun. Bu taktirde, $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ açık örteni içinde, S kümesini örten sonlu sayıda U_i açık kümeleri vardır.

İspat, İspatı $\mathbb{R}^2$ de verelim.

S , kapalı ve sınırlı bir küme olduğundan, S nin kapsadığı bir K_0 karesi vardır. (Sonsuz sayıdakiler örterse, sonlu sayıdakiler de örter.)

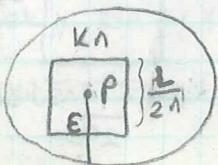
S kümesi, $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ açık örteni içinde sonlu sayıdakilerle örtülmesin.



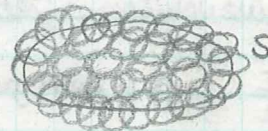
S , $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ açık örteni içinde sonlu sayıdakilerle örtülmediğinden K_0 karesi de örtülmez. K_0 karesini 4 eşit kareye bölelim.

Bu 4 kareden en az biri sonlu sayıdakilerle örtülemez. Örtülemeyen kareye K_1 diyelim. K_1 'i 4 eşit kareye bölelim. Bu karelerden en az biri yine örtülemez. Ve böyle devam edelim. K_n karesine gelelim.

K_n karesinin bir kenarının uzunluğu $\frac{L}{2^n}$ olur.



$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n$ olur.



Bu karelerin hepsine ait bir p noktası vardır. $\frac{L}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$ seçelim. - 479

K_n 'i örtecek bir U yuvarı vardır. Bu da bir çelişkidir.

O halde kabulümüz yanlıştır, teorem doğrudur.

TANIM 4.4.3.

Bir $S \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Eğer S kümesi, Heine-Borel örme özelliğine sahipse, bu S kümesine kompakt (tıkız) küme denir. - 8

Demek ki, $\mathbb{R}^n$ de herhangi kapalı ve sınırlı bir küme kompakttır.

$\mathbb{R}^n$ de, başka türlü kompakt kümeler yoktur.

Alıştırmalar

1 - Aşağıda verilen nokta kümelerinin kapalı, sınırlı, bağlantılı olup olmadıklarını araştırınız.

a) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

b) $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 0\}$

c) $C = \{(x, y) \mid y = |x-1| + 2 - x\}$

d) $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$

e) $E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

f) $F = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x(x-1)(x+1)^2 \leq 0\}$

g) $G = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 > 0\}$

2 - $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ kümesi veriliyor.

a) S nin içini, $\overset{\circ}{S} = ?$

b) S nin sınırını, $\partial S = ?$ bulunuz.

3 - Bir p noktasının bir S kümesinin sınır noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, p 'nin her komşuluğunda S 'ye ait olan ve S 'ye ait olmayan noktaların olmasıdır. Kanıtlayınız.

4 - Açık kümenin tümleyeni kapalı, kapalı kümenin tümleyeni açıktır. Kanıtlayınız.

5 - İki açık kümenin birleşimi de kesişimi de açıktır. Kanıtlayınız.

6- S kümesinin herhangi bir noktası ya kapanış (yığılma) noktasıdır, ya da ayrık noktasıdır. Kanıtlayınız.

7- Gösteriniz ki,

a) Bir S kümesinin içi, S'de bulunan en büyük açık alt kümedir.

b) Bir S kümesinin kapanışı, S'yi kapsayan en küçük kapalı kümedir.

8- Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz ve grafiklerini çiziniz.

a) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x < y \text{ ise} \\ 0, & x = y \text{ ise} \\ 1/2, & x > y \text{ ise} \end{cases}$

9- $f(x) = x^2 + x$, $g(x,y) = x \cdot y$, $h(x) = x + 1$

fonksiyonları için aşağıdaki ifadeleri bulunuz.

a) $f(g(1,2))$

d) $f(f(x))$

g) $f(g(x,h(y)))$

b) $g(f(1),h(2))$

e) $h(f(3))$

c) $g(h(x),f(x))$

f) $g(f(x),h(y))$

10- Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x,y) = y^2 - x$

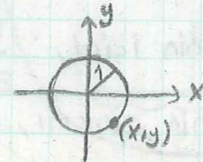
b) $f(p) = |p| - 1$ $p \in \mathbb{R}^2$

c) $f(p) = \begin{cases} 1, & |p| < 1 \text{ ise} \\ x-y, & |p| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ $p \in \mathbb{R}^2$

Çözümler

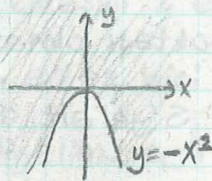
1-a) A, kapalı, bağlantılı, sınırlıdır. Sınırı kendisidir.

$\partial A = A$ dir.



$x^2 + y^2 = 1$

b- $x^2 + y^2 \geq 0$



B, kapalıdır.

($\mathbb{R}^2$ kapalı olduğundan) bağlantılıdır. Fakat

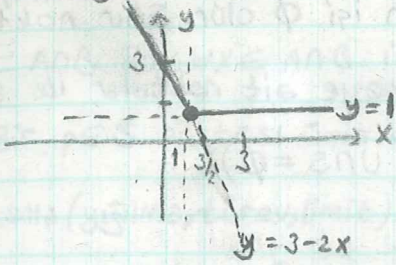
sınırsızdır ama bir sınırı vardır.

$\partial B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$ sınırıdır.

c- $C = \{(x,y) \mid y = |x-1| + 2-x\}$

$x < 1 \Rightarrow -x + 1 + 2 - x = y \Rightarrow y = 3 - 2x$ olur.

$$x > 1 \Rightarrow y = x - 1 \quad 2 - x \Rightarrow y = 1 \text{ olur.}$$

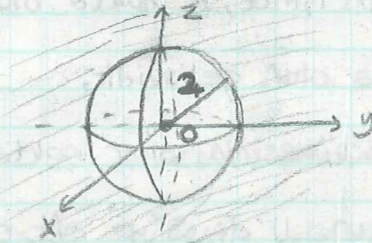


Yalnız sınır noktalarından oluşur, o halde kapalıdır. Bağlantılıdır (Herhangi iki noktayı kürede kalacak şekilde birleştirir). Sınırsızdır. (Sonsuzdaki noktaların başlangıça uzaklığı belli

olmadığından) Sınırı vardır. (kendisidir.)

$$d- D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$$

açık, bağlantılı, sınırsız
fakat sınırı,



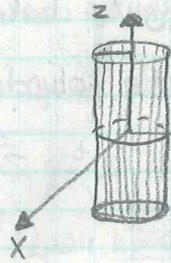
$r = 2$ olan küre.

Tümleyeni kapalı olduğundan bu küme açık olur.

$$\partial D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\} \text{ olur.}$$

$$e- E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Ana doğruları oz 'ye
paralel silindir denklemini.



Kapalıdır. (Yüzeyin noktaları dahil)

Bağlantılıdır. Sınırsızdır fakat

$$\partial E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

yüzey sınırıdır.

$$f- F = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x(x-1)(x+1)^2 \leq 0\}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	-	+
F	+	0	+	0	+

$$(x+1)^2 > 0$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{-1\}$$

f kapalıdır. sınırlıdır. bağlantılı değildir.

Sınırı, $\partial F = \{-1, 0, 1\}$ olur.

$$g- G = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 > 0\}$$

$$G = A \cup B$$

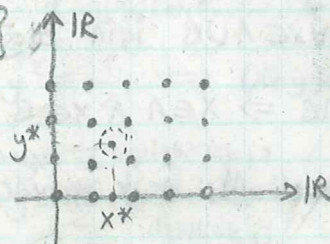
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	+
	A			B

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x\}$$

bağlantılı değildir. sınırsızdır, açıktır.

$\partial G = \{1, 2\}$ sınır noktalarıdır.

$$2- S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$



x^*, y^* rasyonel sayılar olmak üzere

eğer P noktaları $P(x^*, y^*)$ ikililerin-

den oluşuyor ve bu yuvar sadece

S 'nin dış noktasıdır.

1.39 S'ye ait olmayan noktalar dış noktalardır. S'nin içi $\emptyset$ olur. S'nin sınırı kendisidir. Bağlantılı değildir. Bir kümenin, kümeye ait noktalar ile ε kompuluğu $\emptyset$ ise bu küme bağlantılı değildir. ($U \cap S = \emptyset$)

3- $P \in \partial S$ olsun. $B(P, \varepsilon) = U$ diyelim.

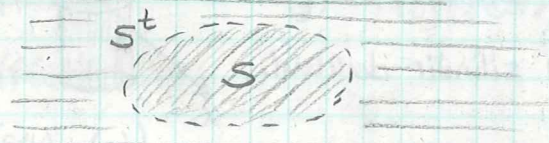


U yuvarında sadece S'nin iç noktaları varsa P S'nin içinde, iç nokta olur. Çelişkidir. S'ye ait hiç nokta yoksa P, dış nokta olur. Çelişkidir.

O halde P noktası S kümesinin sınır noktasıdır.

Tersine, $B(P, \varepsilon) = U$ olsun. U'da S'ye ait olan ve henüz de ait olmayan noktalar olsun. P noktasının nerede olduğuna bakalım. U'da yalnız iç noktalar olsaydı P iç nokta, tersine dış nokta olurdu. P noktası S'nin sınır noktasıdır.

4- S açık ise S^t kapalıdır.



S kapalı ise S^t açıktır.

S açık olsun. Bu takdirde $\partial S \subset S^t$ olur.

$\forall x \in S^t, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ olur. S^t 'ye ait her nokta dış noktadır. O halde ∂S 'nin elemanları da S için dış noktadır. Oysa ∂S 'nin elemanları dış nokta değildir. Çelişkidir. S^t kapalı olur.

S kapalı olsun. Bu takdirde $\partial S \subset S$ olur. Eğer S^t kapalı ise ve $\partial S \subset S^t$ olur. Çelişkidir. S'nin sınırı hem S, hem de S^t 'ye ait olmadığından S^t açık olur.

5-



$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ dir.

$x \in A$ olsun. X merkezli açık yuvar N_1 olsun.

$N_1 \cap A \subset A \cup B$ dir. Yine $x \in B$ olsun. X merkezli

açık yuvar N_2 olsun. $N_2 \subset A \cup B$ dir.

$\Rightarrow N_1 \cup N_2 \subset A \cup B$ $\forall x \in A \cup B$ için doğrudur.



$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ dir.

X merkezli r_1 yarıçaplı M_1 açık yuvarı $M_1 \subset A$ için

X merkezli r_2 yarıçaplı M_2 açık yuvarı $M_2 \subset B$ için

$\min(r_1, r_2) = r$ diyelim. X merkezli r yarıçaplı açık M yuvarı için

483

$M \subset A \cap B$ dir. $\forall x \in A \cap B$ için doğrudur.

6- Bir $p \in S$ noktası için p merkezli ϵ yarıçaplı açık yuvar U olsun.

(Kapanıp (yığılma, türev, limit) noktası) $U \subset S$ ise p noktası bir yığılma

noktasıdır. Eğer p nin ϵ açık komşuluğunda hem S den elemanlar varsa hem de

S 'den başka elemanlar varsa $U \cap S = \emptyset$ ise p noktası ayrık noktadır.



7- a) $\dot{S} \subset S$ dir. Kabul edelim ki $\dot{S} \subset S_1 \subset S$ olsun.



$x \in S_1 \setminus \dot{S}$ kümesini alalım ve bir x elemanının ϵ

($\epsilon > 0$)

komşuluğu V olsun. V yuvarı S nin alt kümesidir. $V \subset S$ dir.

O halde x noktası S nin içine düşer ve S_1 in de içine düşer. Bu bir

gelişkidir. Ve sonunda $S_1 \neq S$ olamaz.

b) $S \subset \bar{S} \subset \bar{S}_1$ ($\bar{S}$: kapalı küme) S 'den büyük bir S_1 kümesi alalım.

$x \in \bar{S}_1 \setminus \bar{S}$ alalım. x merkezli ϵ yarıçaplı yuvara U diyelim.

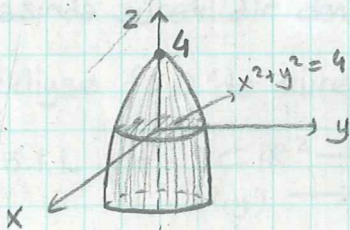
$S \cap U = \emptyset$ olur. ($S \subset \bar{S}$ olduğundan U bunların arasındadır.)

x bir dış nokta olur. Halbuki $x, \bar{S}_1$ yi kapsayan bir nokta olduğundan bu

bir gelişkidir. İspat tamamlanmış olur.

8- a) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

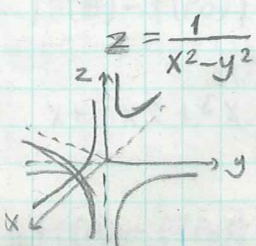
$z = 4 - x^2 - y^2$ eliptik parabolit olur. $x^2 + y^2 = 4$



Tüm tanım kümesi $\mathbb{R}^2$ nin tamamıdır.

b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$ $\mathbb{R}^2$ de, $x = \pm y$ doğrusu hariç ($x = \pm y$ de sonsuz)

tanımlıdır. Başlangıç noktasında da tanımsızdır.



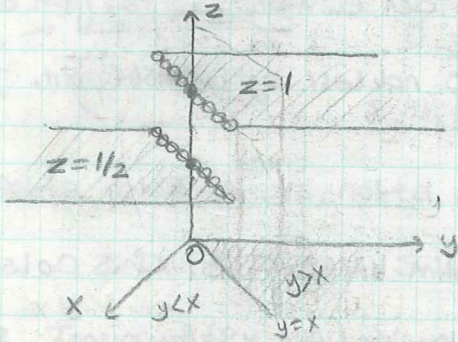
$$x^2 - y^2 = \frac{1}{z} \Rightarrow (x-y)(x+y) = \frac{1}{z}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y = \frac{1}{m} \\ x+y = \frac{m}{z} \end{cases}$ düzlemlerinin oluştugu regle yüzeydir.

M değıştikçe düzlemler değışir. Düzlemlerin arakesiti bir doğrudur ve bu doğru $z = \frac{1}{x^2+y^2}$ yüzeyini oluşturun.

c) $z = \begin{cases} 1, & x < y \text{ ise} \\ 0, & x = y \text{ ise} \\ 1/2, & y < x \text{ ise} \end{cases}$

$x=y$ doğrusu boyunca süreksiz, $\mathbb{R}^2$ nin tüm noktalarında süreklidir.

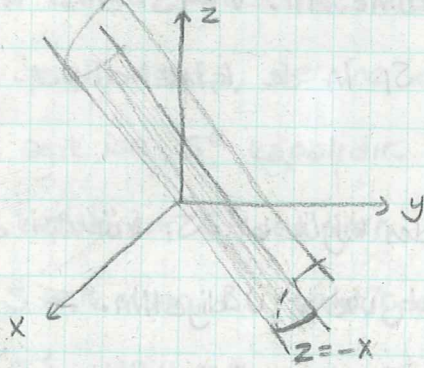


oz den geçen xoy düzlemini 45° lik açıyla kesen düzlemdir.

(6-5)

10- a) $f(x,y) = y^2 - x$ $z=0 \Rightarrow y^2 = x$ bu düzlemin xy ile arakesitidir.

parabolik silindir.



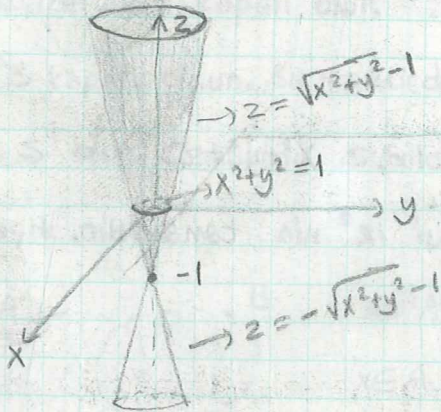
(d)

b) $f(P) = |P| - 1$ $P \in \mathbb{R}^2$

$P = (x,y)$ $|P| = \sqrt{x^2+y^2}$ $z = \sqrt{x^2+y^2} - 1$

$z+1 = \pm \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} - 1 \\ z = -\sqrt{x^2+y^2} - 1 \end{cases}$

(6-8)



9- $f(x) = x^2 + x$ $g(x,y) = x \cdot y$ $h(x) = x + 1$

$f(g(1,2)) = ?$ $g(1,2) = 2 \Rightarrow f(2) = 6$

$g(f(1), h(2)) = ?$ $f(1) = 2$, $h(2) = 3$ $g(2,2) = 6$

$g(h(x), f(x)) = ?$ $g(x+1, x^2+x) = (x+1)(x^2+x) = x(x+1)^2 = x^3 + 2x^2 + x$

$f(f(x)) = ?$ $f^2(x) + f(x) = (x^2+x)^2 + (x^2+x)$

$$h(f(1)) = ? \quad h(12) = 12 + 1 = 13$$

$$g(f(x), h(y)) = ? \quad g(x^2 + x, y + 1) = (x^2 + x)(y + 1)$$

$$f(g(x, h(y))) = ? \quad f(x(y + 1)) = x^2(y + 1)^2 + x(y + 1)$$

$$10 - c) \quad f(p) = \begin{cases} 1, & |p| < 1 \text{ ise} \\ x - y, & |p| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$p = (x, y) \quad |p| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \text{ ise} \\ x - y, & \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

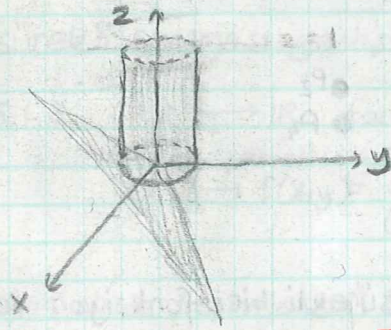
$$z = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 < 1 \text{ ise} \\ x - y, & x^2 + y^2 \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$z = x - y$$

$$z = -y$$

$$x = y$$

$$x = z$$



- V. BÖLÜM -

5.1. SÜREKLİLİK

TANIM 5.1.1

$$D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için her $p \in D$ olduğunda

$$|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$$

olacak biçimde $p_0 \in D$ noktasının bir U komşuluğu varsa f fonksiyonu p_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu D 'nin her noktasında süreklirse f , D 'de süreklidir denir.

Örnek 5.1.1. $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \rightarrow x^2 + 5y$ fonksiyonu $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

de süreklidir. Gösterelim.

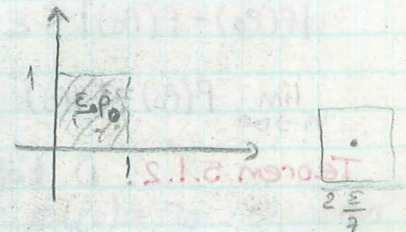
$$p_0, p \in D \text{ olsun. } p = (x, y) \quad p_0 = (x_0, y_0)$$

$$|f(p) - f(p_0)| = |x^2 + 5y - x_0^2 - 5y_0|$$

$$= |(x + x_0)(x - x_0) + 5(y - y_0)|$$

$$\leq |x + x_0| |x - x_0| + 5 |y - y_0| \leq 2 |x - x_0| + 5 |y - y_0| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{7} + 5 \cdot \frac{\varepsilon}{7}$$

$$|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon \text{ olur.}$$



0 halde verildi her birim kare için f sürekli dir. $\forall p_0 \in D$.

TANIM 5.1.2.

$\mathbb{R}^2$ de dizi diye $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, $\mathbb{R}$ de diziler olmak üzere

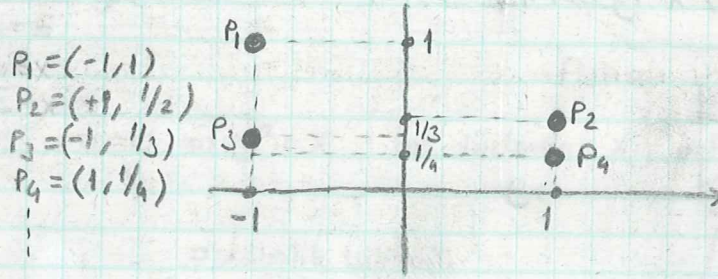
$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$n \rightarrow f(n) = p_n = (x_n, y_n) \text{ fonksiyonuna denir.}$$

Genel terimi p_n dan dizi $\{p_n\} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ $p_n \in \mathbb{R}^2$, $p_n = (x_n, y_n)$

biçiminde gösterilir. Bu terimlerin herbirine dizinin izi denir.

Örnek 5.1.2. $p_n = ((-1)^n, \frac{1}{n})$ olmak üzere $\{p_n\}$ dizisinin birkaç izini gösterelim.



Teorem 5.1.1. f fonksiyonu bir $p_0 \in D$ noktasında sürekli bir fonksiyon ve $\{p_n\}$ dizisi de D' de, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$ koşulunu sağlayan nokta dizisi olsun.

Bu takdirde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = f(p_0)$$

1.1.2 MİMAT

dir. (Bu duruma, sürekli fonksiyonlar yakınsaklığı koruyor denir.)

İspat // $\epsilon > 0$ verilsin ve U 'da $p_0 \in D$ noktasının $\forall p \in U \cap D$ için

$$|f(p) - f(p_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir komşuluğu olsun. Süreklilikten maden ki $\forall p \in D$ için

$\{p_n\}$ dizisi p_0 noktasına yakınsıyor. Yeterince büyük n 'ler için

$p_n \in U$ olur. Yani belli bir n_0 dan büyük n 'ler için

$p_n \in U \cap D$ dir. Demek ki, $n_0 < n$ için

$|f(p_n) - f(p_0)| < \epsilon$ olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bunun anlamı;

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = f(p_0)$ dir. Yani, bu $\{f(p_n)\}$ dizisi, $\{f(p_0)\}$ 'a yakınsar.

Teorem 5.1.2. D bölgesinde tanımlı bir fonksiyon f olsun. $\forall p_n \in D$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$$

olduğunda, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = f(p_0)$ oluyorsa f , p_0 noktasında sürekli dir.

(Yakınsaklığı koruyan fonksiyonlar P_0 noktasında sürekli dir. $P_0 \in D$)

487

İspat // f yakınsaklığı korusun fakat $P_0 \in D$ noktasında sürekli olmasın.

Yani $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, P_0 noktasının $P \in U \cap D$ olduğunda

$$|f(P) - f(P_0)| > \varepsilon \text{ olur.}$$

$U_n = \{P \mid P \in \mathbb{R}^n, |P - P_0| < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+\}$ seçelim. Bu durumda

$P_n \in U \cap D$ alırsak $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $|f(P_n) - f(P_0)| > \varepsilon$ bulunur.

Bu ise $\{f(P_n)\}$ dizisinin $\{f(P_0)\}$ 'a yakınsamadığını gösterir. Bu da

hipoteze aykırıdır. Kabul yanlıştır. Yani yakınsaklık korunduğunda

sürekli olmaması yanlıştır. O halde teorem doğrudur.

Örnek 5.1.3. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$(x,y) \rightarrow f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$$

teoremi

biçiminde tanımlansın. Bu fonksiyonun $(0,0)$ noktasında sürekli olup olmadığını araştırınız.

Çözüm // $P_n = (\frac{1}{n}, \frac{c}{n})$, $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{c^2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{c^4}{n^4}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nc^2}{n^2(1 + \frac{c^4}{n^2})} = \frac{c^2}{\infty} = 0$$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \rightarrow P_0, \text{ iken} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = f(P_0) \text{ ise } f, P_0 \text{ da} \\ \text{sürekli dir.} \end{array} \right\}$

$Q_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$, $Q_n \rightarrow (0,0)$ başlangıç noktasına yakınsar.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(Q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^4}}{2 \cdot \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \text{ başlangıç noktasına yakınsamaz.}$$

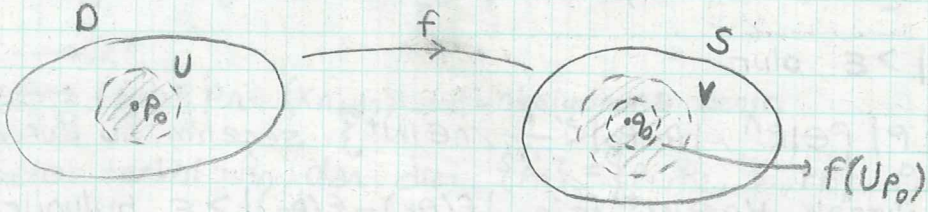
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q_0 \text{ iken} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(Q_n) \neq f(Q_0) \end{array} \right\}$$

TANIM 5.1.3.

Bir $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(P_0) = Q_0$ noktasının

her V komşuluğu için $P \in U \cap D$ olduğunda $f(U) \subset V$ olacak biçimde

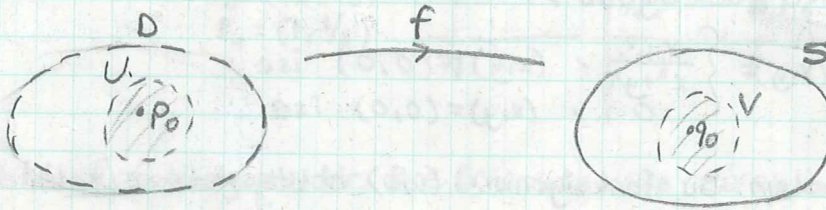
$p_0 \in D$ noktasının bir U komşuluğu varsa f, p_0 noktasında sürekli, eğer $f, V p_0 \in D$ noktasında sürekli ise f, D 'de sürekli dir.



$\forall p_0 \in D$ için yukarıdaki koşul varsa, f, D 'de sürekli dir.

Teorem 5.1.3. $\mathbb{R}^n$ nin bir D açık alt kümesinde tanımlı bir f fonksiyonunun D üzerinde sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul her açık kümenin ters görüntüsünün açık olmasıdır.

İspat //



$\Rightarrow$: f sürekli olsun. Her açık kümenin ters görüntüsünün açık olduğunu gösterelim. $f^{-1}(V) = M$ diyelim. M 'nin açık olduğunu görelim.

f sürekli olduğundan $f(U) \subset V$ ($f(p_0) = q_0, p_0 \in U \Rightarrow f(p_0) \in V$)

$f(U \cap D) \subset V$ olur. Ters görüntülerini alırsak,

$$f^{-1}(f(U \cap D)) = U \cap D \subset M \quad p_0 \in U \cap D$$

Her $p_0 \in D$ için aynı şeyi tekrarlarız. M 'nin her noktası iç nokta olduğundan M kümesi açık olur.

$\Leftarrow$: kabul edelim ki, f^{-1} açığı açığa götürsün. f 'nin sürekli olduğunu gösterelim.

$p_0 \in D, f(p_0) \in V$ olur. $f^{-1}(V) = W$ diyelim. (W , açıktır.)

W açık olduğundan p_0 'ın bir U komşuluğunu kapsar. $U \subset W$ dir.

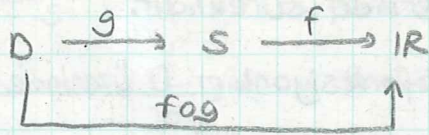
$f(U) \subset V$ olur. Bu da f nin p_0 noktasında sürekli olduğunu

gösterir. Aynı şeyi $\forall p_0 \in D$ için yapabiliriz. O halde f, D de sürekli dir.

Teorem 5.1.4. g fonksiyonu D kümesi, f 'de S kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olsunlar.

Bu taktirde $f \circ g$ fonksiyonu da D üzerinde sürekli dir. 2. m. 5. 489

ispat //



f, S 'de sürekli olduğundan $\forall \epsilon \in \mathbb{N} \setminus S$ için $|f(q) - f(q_0)| < \epsilon$ olacak şekilde $q_0 \in S$ 'in bir V komşuluğu vardır. Yine $g; D$ 'de sürekli olduğundan $\forall \epsilon \in \mathbb{N} \setminus D$ için $g(p_0) \in V \cap S$ olacak biçimde $p_0 \in D$ bir U komşuluğu var. Her $p \in U \cap D$ için $g(p) \in V \cap S$ olur. ($g(p) = q$)

Denek ki, $\forall p \in U \cap D$ için $|g(p) - f(g(p_0))| < \epsilon$ yani,

$|f(g(p)) - f(g(p_0))| < \epsilon$ olacak şekilde $p_0 \in D$ noktasının bir U komşuluğu vardır. O halde $f \circ g$ fonksiyonu $p_0 \in D$ de sürekli dir. f. 1. 6 m. 5. 489

$\forall p_0 \in D$ için $f \circ g$ bileşke fonksiyonu D üzerinde sürekli dir.

Teorem 5.1.5. f ve $g, D \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde gerçel değerli ve sürekli fonksiyonlar iseler ; $(f+g)$ 'de, D üzerinde sürekli dir.

ispat // $f: D \rightarrow \mathbb{R}, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olduklarından (sürekli fonksiyonlar yatamsaklığı korur.) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = f(p_0)$

ve $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} g(p_n) = g(p_0)$ dir. Bunun anlamı,

$n_0 < n$ için $|f(p_n) - f(p_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı ve $n_1 < n$ için $|g(p_n) - g(p_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ olacak biçimde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı var denektir.

$\max(n_0, n_1) = n_2$ diyelim. 2. 5. 489 m. 5. 489

$$\begin{aligned} n_2 < n \text{ için } |(f+g)(p_n) - (f+g)(p_0)| &= |f(p_n) + g(p_n) - f(p_0) - g(p_0)| \\ &\leq |f(p_n) - f(p_0)| + |g(p_n) - g(p_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

Bulunur. Bunun anlamı, $(f$ ve g fonksiyonları) $(f+g), p_0 \in D$ de sürekli dir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (f+g)(p_n) = (f+g)(p_0)$ olur.

$\forall p_0 \in D$ için $(f+g)$ sürekli dir.

Teorem 5.1.6. f ve g , D üzerinde tanımlı, gerçel değerli sürekli fonksiyonlar iseler, $f.g$ fonksiyonu da D üzerinde sürekli dir.

İspat, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları D üzerinde sürekli olduklarından f ve g fonksiyonu $P_0 \in D$ noktasında sürekli dir. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$

iken $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = f(P_0)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} g(P_n) = g(P_0)$

ya zılabilir. Buradan, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(f.g)(P_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(P_n).g(P_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(P_n) = f(P_0) \cdot g(P_0) = (f.g)(P_0)$$

bulunur. Demek ki, $f.g$ fonksiyonu $P_0 \in D$ noktasında sürekli dir.

$\forall P_0 \in D$ için de $(f.g)$, D 'de sürekli dir.

Teorem 5.1.7. f ve g , D üzerinde tanımlı, gerçel değerli sürekli fonksiyonlar iseler $\forall P \in D$ için $g(P) \neq 0$ olmak koşuluyla $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da D üzerinde sürekli dir.

İspat, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları D üzerinde sürekli olduklarından $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = f(P_0)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} g(P_n) = g(P_0)$ (f ve g $P_0 \in D$ de sürekli dir.)

$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} g(P_n) = g(P_0)$

Önce g , D 'de sürekli ise $g(P) \neq 0$ olmak koşuluyla $\frac{1}{g}$ fonksiyonu da D 'de sürekli olduklarından $P_0 \in D$ noktasında $g(P_0) \neq 0$ olmak koşuluyla $f \cdot \frac{1}{g}$ fonksiyonu da D de sürekli dir. Teorem (5.1.6.) dan.

13.12.94 SALI

5.2. Yaklaşım Özellikleri ve Düzgün Süreklilik

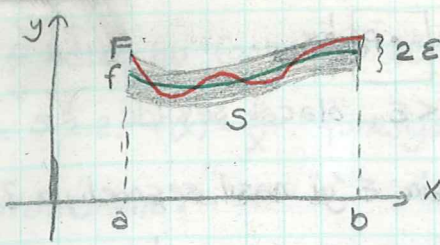
TANIM 5.2.1.

$M \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eger $\forall P \in M$ için ;

$$|f(P) - F(P)| < \epsilon \quad \epsilon > 0$$

olacak şekilde bir F fonksiyonu varsa, F fonksiyonu, f fonksiyonuna M üzerinde ϵ 'den küçük farkla düzgün olarak yaklaşır denir.

$M = [a, b]$ alalım.



$$M = [a, b] \subset \mathbb{R}$$

f ve F fonksiyonları bir değişkenli

fonksiyonlar olsunlar. O halde,

F fonksiyonu f fonksiyonuna ε 'den

küçük farkla düzgün olarak yaklaşır. $|f(p) - F(p)| < \varepsilon$ olur.

(S serinin ortası, f fonksiyonu, F dalma S serisinin içinde kalıyorsa

F fonksiyonu f fonksiyonuna S seridi üzerinde ε den daha küçük farkla

yaklaşıyor demir.) F nin grafiği S seridin üzerinde kalıyorsa F , f nin ε

kompulugunda bulunur demir ve

$$\|f - F\|_M < \varepsilon$$

yazılır. Buradaki $\| \cdot \|_M$ simgesi ; örneğin $\|g\|_M$ demek, g nin en küçük

üst sınırı demektir. Yani $\|g\|_M = \sup_{p \in M} |g(p)|$ olarak tanımlanır ve

g 'nin normu diye okunur.

Bu yaklaşımlarla ilgili en önemli teorem Weierstress yaklaşım teoremidir. Bu teoremi bir değişkenli sürekli ve $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı, gerçel değerli bir fonksiyon için aşağıdaki şekilde ifade ederiz.

Teorem 5.2.1. $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlanmış her gerçel değerli fonksiyona düzgün olarak ε 'den daha küçük farkla yaklaşmak mümkündür. (İspatı yapılmayacaktır)

Örnek // (5.1.1) aynısı.

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$(x, y) \rightarrow x^2 + 5y$$

Birim karede sürekli idi. Tüm $\mathbb{R}^2$ de sürekli olduğunu gösterelim.

$P_0 = (x_0, y_0)$ alalım. $\forall p \in U \subset \mathbb{R}^2$ için $|f(p) - f(P_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde

P_0 'in bir U kompuluğu vardır. U kompuluğunu;

P_0 merkezli ve 2δ uzunluklu karesel kompuluk alalım.

$\forall P \in \mathbb{NIR}^2$ için, $P = (x, y)$ $P_0 = (x_0, y_0)$

$$\boxed{\cdot P_0} \begin{matrix} 2\delta \\ 1 \end{matrix}$$

$|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ olduğunda $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde

P_0 merkezli U komşuluğunu bulalım. Bunun için δ 'yı nasıl seçmeliyiz?

$$|f(P) - f(P_0)| = |x^2 + 5y - x_0^2 - 5y_0| = |(x - x_0)(x + x_0) + 5(y - y_0)|$$

$$\leq |x - x_0| |x + x_0| + 5|y - y_0|$$

$0 < \delta < 1$ seçelim.

$$< \delta |x + x_0| + 5\delta$$

$$|x + x_0| = |x - x_0 + x_0 + x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| < \delta + 2|x_0| < 1 + 2|x_0|$$

$$|f(P) - f(P_0)| < \delta |x + x_0| + 5\delta < \delta (2|x_0| + 6)$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 6} \text{ seçilmeli}$$

$\Rightarrow |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ olur. Yani,

$|x^2 + 5y - x_0^2 - 5y_0| < \varepsilon$ olur. $P_0 \in \mathbb{R}^2$ nin keyfi bir noktası olduğundan

$\forall P_0 \in \mathbb{R}^2$ için bu koşul sağlanır. ($\forall P \in \mathbb{NIR}^2$ için aynı şey söylenir.)

O halde bu fonksiyon tüm $\mathbb{R}^2$ de sürekli dir.

(δ ; hem ε 'a, hem de seçilen noktaya bağlıdır.)

TANIM 5.2.2.

$M \subset \mathbb{D}$ ve M üzerinde tanımlanan fonksiyon f olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $P, Q \in M$ olmak üzere $|P - Q| < \delta$ olduğunda $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ olacak şekilde $P, Q \in M$ noktalarının seçimine bağlı olmayan bir $\delta > 0$ bulunabilirse f fonksiyonu M üzerinde düzgün sürekli dir denir.

Örnek 5.2.1. $f(x) = 5x$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ 'de düzgün sürekli olup olmadığını araştırınız.

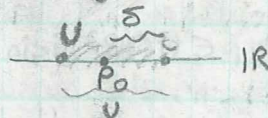
Gözüm, $P = x$ $P_0 = x_0$, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde

P_0 in bir (δ yarıçaplı) U komşuluğunu bulmalıyız. Öyle ki P_0 merkezli

δ yarıçaplı U komşuluğu bulurken, δ yı yalnız ε 'a bağlı P_0 noktasından

bağımsız olarak bulabilirsek, verilen fonksiyonun $\mathbb{R}$ de düzgün sürekli

olduğunu göstermiş oluruz.



$$P, P_0 \in \mathbb{R} \quad |x - x_0| < \delta$$

$$P \in \mathbb{NIR} \text{ için } |x - x_0| < \delta \text{ olduğunda } |f(P) - f(P_0)| = |5x - 5x_0| = 5|x - x_0| < 5\delta$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{5} \text{ seçersek, } |x - x_0| < \delta \text{ olduğunda } |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon \text{ olur.}$$

0 halde bu fonksiyon tüm $\mathbb{R}$ de sürekli dir. (Düzen sürekli dir.)

493

Örnek 5.2.2. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ 'de düzen sürekli olup olmadığını

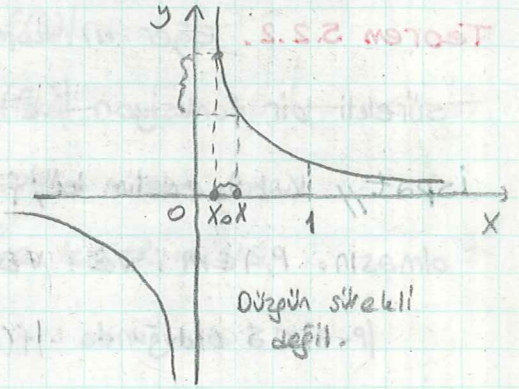
araştırınız.

$P = x$ $P_0 = x_0$ $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde

P_0 'ın bir δ komşuluğunu bulalım.

$$x = \frac{\delta}{1+\varepsilon} \quad x_0 = \delta \quad \varepsilon > 0 \quad \delta > 0 \quad 0 < \delta < 1$$

$$|f(P) - f(P_0)| = \left| \frac{1}{\frac{\delta}{1+\varepsilon}} - \frac{1}{\delta} \right| = \frac{\varepsilon}{\delta} > \varepsilon$$



Bu fonksiyon sıfır noktasının sağ ve sol komşuluğunda düzen sürekli değildir. Ama bunun dışında olabilir.

Örnek 5.2.3. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ 'de düzen sürekli olup olmadığını

araştırınız. (Ödev)

(Bir önceki soruda; $f(x) = \frac{1}{x}$, $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde

$\delta(\varepsilon)$? bakalım.

$$0 < x_0 < x < 1$$

$$|x - x_0| < \delta \text{ olduğunda } |f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{|xx_0|} < \frac{\delta}{xx_0} < \frac{\delta}{x_0^2}$$

$\delta = \varepsilon \cdot x_0^2$ seçersek (δ her ε 'a, her de seçilen noktaya bağlıdır.)

$|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olur. Sıfırın sağ komşuluğunda düzen sürekli değildir. Sol komşuluğunda da aynı şekilde tanımlı değil, düzen sürekli değildir.)

$\mathbb{R}^n$ de yakınsak her $\{P_n\}$ dizisi sınırlıdır. Her sınırlı $\{P_n\}$ dizisi yakınsak alt diziye sahiptir ve $\{P_n\}$ dizisinin alt dizisel limit noktaları kümesi kapalıdır. O halde şunu söyleyebiliriz :

Bir $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul, M 'deki her nokta dizisinin yine M 'deki bir noktaya yakınsayan bir alt diziye sahip olmasıdır.

$\mathbb{R}^n$ nin sonsuz elemanlı her A alt kümesi, aşağıdaki üç özellikten birine sahipse diğerlerine de sahiptir.

1- A kümesi kapalı ve sınırlıdır.

2- " kompakttır.

3- " nin her sonsuz elemanlı alt kümesi A kümesinde, yığılma noktasına sahiptir. (Bolzano-Weierstrass teoremi)

Teorem 5.2.2. Eğer M kompakt bir küme ise ve f 'de M üzerinde sürekli bir fonksiyon ise f, M 'de düzgün süreklidir.

İspat // Kabul edelim ki; f, M 'de sürekli olsun, fakat düzgün sürekli olmasın. $P, q \in M$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$|P - q| < \delta \text{ olduğunda } |f(P) - f(q)| > \varepsilon \text{ olur.}$$

f, M 'de sürekli olduğundan bunun olanayacağını göstereyim.

M kompakt olduğundan M 'deki bir noktaya yakınsayan bir $\{P_n\}$ dizisi vardır.

Yine M kompakt olduğundan, M deki aynı noktaya yakınsayan $\{P_n\}$ dizisinin

$\{P_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. $\delta = \frac{1}{n}$ olmak üzere $|P_{n_k} - q_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \quad n_k \in \mathbb{N}^+$

$$|P_n - q_n| < \delta \text{ yazılabilir. } P_n, q_n \in M$$

q_n, P_n e çok yakın olduğundan δ çok küçük bir sayıdır. M kompakttır.

M kompakt olduğundan $\{q_n\}$ in de bir alt dizisi var ve aynı yere yakınsar.

Bu da $\{q_{n_k}\}$ dizisidir.

$$|q_{n_k} - P_0| = |q_{n_k} - P_{n_k} + P_{n_k} - P_0| \leq |q_{n_k} - P_{n_k}| + |P_{n_k} - P_0|$$

$$n_k \rightarrow \infty \text{ için } |q_{n_k} - P_{n_k}| < \frac{1}{n_k} + |P_{n_k} - P_0| = 0 + |P_0 - P_0| = 0$$

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} |P_{n_k} - q_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \text{ olduğunda } \lim_{n_k \rightarrow \infty} |f(P_{n_k}) - f(q_{n_k})| = f(P_0) - f(P_0) = 0$$

Oysa $|f(P_{n_k}) - f(q_{n_k})| > \varepsilon$ olmalıydı. Çelişkidir.

O halde kabulümüz yanlıştır. Teorem doğrudur.

Teorem 5.2.3. D kümesi üzerinde sürekli bir fonksiyon f ve $P_0 \in D$ için

$f(P_0) > 0$ olsun. Bu takdirde $\forall \varepsilon < f(P_0)$ için $f(P) > \varepsilon$ olacak şekilde

bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve P_0 'in bir U komşuluğu vardır. (Bir fonksiyon P_0

noktasında sürekliyse, P_0 noktasının belli bir komşuluğunda daima aynı

işareti korur.)

İspat// $\epsilon > 0$ sayısını $f(p_0) > 0$ dan yararlanarak, $\epsilon = \frac{1}{2} f(p_0)$ alalım ve 495
 p_0 'ın her U komşuluğunda $\forall p \in U \cap D$ olduğunda $|f(p) - f(p_0)| < \epsilon$ olacak
 şekilde seçebiliriz. $p \in U \cap D$ için,

$$\begin{aligned} f(p) &= f(p) - f(p_0) + f(p_0) = f(p_0) - (f(p_0) - f(p)) \quad (|x-y| \leq |x| + |y| \text{ idi}) \\ &> \underset{>0}{|f(p_0)|} - |f(p_0) - f(p)| \\ &> f(p_0) - |f(p) - f(p_0)| \\ &> 2\epsilon - \epsilon > \epsilon \text{ olur.} \end{aligned}$$

Teorem 5.2.4. D üzerinde sürekli bir fonksiyon f ve $k \in \mathbb{R}$ olsun.

S ve G kümeleri,

$$S = \{p \mid p \in D, f(p) < k\}$$

$$G = \{p \mid p \in D, f(p) = k\}$$

biçiminde tanımlanırsa; S kümesi, D deki bünyesel topolojiye göre açık;
 G kümesi, D deki bünyesel topolojiye göre kapalıdır.

İspat// $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
 $p \rightarrow f(p) = y$ diyelim ve $V = \{y \mid y > k\}$ kümesini tanımlayalım.

V açıktır. $f^{-1}(V) = S$ dir. f sürekli olduğundan f^{-1} , V açığını açığa
 götüreceğinden $f^{-1}(V) = S$ de açıktır. $S = S \cap D$ dir. (Açık kümenin D
 ile kesişimi S ise, S bünyesel topolojiye göre açıktır.)

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow f(p) = y \text{ diyelim ve } W = \{y \mid y = k\} \text{ kümesini tanımlayalım.} \end{aligned}$$

Yani $W = \{k\}$ kümesi kapalıdır. $f^{-1}(W) = G$ dir. f sürekli olduğundan,
 f^{-1} , W kapalıyı kapalıya götüreceğinden $f^{-1}(W) = G$ de kapalıdır.
 $G = G \cap D$ (kapalı kümenin D ile kesişimi G ise, G bünyesel topolojiye göre
 kapalıdır.)

TANIM 5.2.3.

D üzerinde tanımlı gerçel değerli bir fonksiyon f ve $S \subset D$ olsun.

$\forall p \in D$ için $|f(p)| \leq M$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}^+$ sayısı varsa, f fonksi-
 yonuna sınırlıdır denir.

Bir fonksiyon sınırsız küme üzerinde sürekli olabilir. Ya da sınırlı

küme üzerinde sürekli olan fonksiyon sınırlı olmayabilir.

Örnek 5.2.4. $f(x) = x^2$ fonksiyonu sınırsız bir aralıkta sürekli dir.

Örnek 5.2.5. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $0 < x < 1$ aralığında sürekli dir fakat sıfırın sağ komşuluğunda sınırlı değildir.

Teorem 5.2.5. Eger M kompakt bir küme ise M üzerinde sürekli her fonksiyon sınırlıdır.

İspat // M kompakt ; f, M üzerinde sürekli dir. Kabul edelim ki, f sınırlı olmasın. M kompakt olduğundan M 'deki bir noktaya yakınsayan $\{P_n\}$ dizisinin yine M 'deki noktaya yakınsayan $\{P_{n_k}\}$ alt dizisi vardır.

f nin sınırlı olmaması demek, M 'deki $\forall \{P_{n_k}\}$ alt dizileri için $n_k \in \mathbb{N}^+$ $|f(P_{n_k})| > n_k$ olması demektir. Halbuki M kompakt olduğundan P_0 noktaya yakınsayan $\{P_n\}$ dizisinin $\{P_{n_k}\}$ alt dizisi de M deki P_0 noktasına yakınsar. f sürekli olduğundan (sürekli fonksiyon yakınsaklığı korur.) $\{f(P_{n_k})\}$ dizisi de $f(P_0)$ noktasına yakınsar. Bu ise $\{f(P_{n_k})\}$ dizisinin yakınsak olması demektir. Bu ise $|f(P_{n_k})| > n_k$ ile çelişir.

Kabulümüz yanlış, teorem doğrudur.

Teorem 5.2.6. Eger S kompakt bir küme ve f de S üzerinde sürekli ise f fonksiyonu S nin bazı noktalarında maksimum ve S nin bazı noktalarında minimum değerleri alır.

İspat // S kompakt olduğundan f sınırlıdır. Yani $\forall P \in S$ için $|f(P)| \leq M$ dir. Hatta $\forall P \in S$ için $m \leq f(P) \leq M$ dir. ($P_0 \in S$)

$\sup f(P) = M$, $f(P_0) = M$ dir. Kabul edelim ki $f(P_0) = M$ olacak şekilde S nin hiçbir noktası olmasın. O zaman $\forall P \in S$ için $f(P) < M$ olur. 2. MİNİMUM

Şimdi, $g(P) = \frac{1}{M - f(P)}$ olacak şekilde g fonksiyonu tanımlayalım.

g fonksiyonu hem pozitif hem de sınırlıdır. $\forall P \in S$ için $g(P) \leq L$ yazabiliriz.

$$L = \frac{1}{M-f(P)} \Rightarrow M-f(P) = \frac{1}{L} \Rightarrow f(P) = M - \frac{1}{L} \text{ bulunur.}$$

M, f nin en küçük üst sınırı idi. Bu durumda $M - \frac{1}{L} < M$ olduğunda $M - \frac{1}{L}$ f 'nin en küçük üst sınırı olur. Bu ise çelişkidir.

O halde $f(P_0) = M$ olacak şekilde S 'nin bir noktası vardır.

$\forall P \in S$ için $m \leq f(P)$ dir. $m = \inf f(P)$ dir. Yine, $m = f(P_0)$ olacak şekilde S nin hiçbir noktası olmasın. O zaman $\forall P \in S$ için $m < f(P)$ olur.

Şimdi, $g(P) = \frac{1}{f(P)-m}$ olacak şekilde g fonksiyonunu tanımlayalım.

S kompakt ve f sınırlıdır. O halde g 'de pozitif ve sınırlıdır. Yani her $P \in S$ için $L \leq g(P)$ yazabiliriz. $L > 0$,

$$L = \frac{1}{f(P)-m} \Rightarrow f(P)-m = \frac{1}{L} \Rightarrow f(P) = m + \frac{1}{L}$$

m, f nin en büyük alt sınırı idi. Bu durumda $m + \frac{1}{L} > m$ olduğunda $m + \frac{1}{L}$ f nin en büyük alt sınırı olur. Bu ise çelişkidir.

O halde $f(P_0) = m$ olacak şekilde S nin bir noktası vardır.

Teorem 5.2.7. M kompakt küme üzerinde tanımlı olan f fonksiyonunun M kompakt küme üzerinde sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, f nin grafiğinin kompakt olmasıdır.

İspat, $\Rightarrow$: f sürekli olsun. f nin grafiği kompakttır. Gösterelim.

C grafiğin noktalarının kümesi olsun.

$$f: M \rightarrow Y \quad C = \{(x, y) \mid x \in M \subset \mathbb{R}^n, y = f(x)\}$$

kompakt olduğunu göstermek için, o kümeye yakınsayan kümenin alt kümesinin yakınsak olduğunu göstermeliyiz.

$f(M)$ kompakt mıdır? (f nin M altındaki görüntüsü.)

M kompakt olduğundan M 'deki bir x_0 'a yakınsayan $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_k}\}$ gibi bir alt dizisi vardır. $y = f(x)$ olduğundan ve f sürekli olduğundan $\{f(x_n)\} = \{y_n\}$

$$\text{Eğer } x_0 \in M \Rightarrow f(x_0) \in f(M) \quad \{f(x_{n_k})\} = \{y_{n_k}\}$$

0 halde $\{y_n\}$ dizisi y_0 'a yakınsayan bir alt dizidir ve o'da $f(M)$ in elemanıdır denir.

0 halde $f(M)$ kompakttır.

$P_0(x_0, y_0) \in C$ dir. $P_n \in C$ $P_n = (x_n, y_n)$

$\{P_n\}$ C 'deki alt noktaya yakınsayan

- x_0 'a yakınsayan $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır.
- Yine y_0 'a yakınsayan $\{y_n\}$ dizisinin $\{y_{n_k}\}$ alt dizisi vardır.

0 halde C kompakttır denir.

$\Leftarrow$: C kompakt ise f süreklidir.

$C = \{(x, y) \mid x \in M, y = f(x)\}$ kümesi kompakt olsun. f süreklidir.

Gösteriniz. Kabul edelim ki, C kompakt fakat f sürekli olmasın.

0 zaman C kompakt olduğundan C 'nin M deki x_0 'a yakınsayan bir alt dizisi vardır.

Öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ki, $n_0 < n$ ler için

$|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$ olur. (sürekli olmadığının.)

f.2.8 teorem

Yine C kompakt olduğundan bunun P_0 'a yakınsayan bir alt dizisi vardır.

Çok büyük n 'ler için $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_0 \right)$

11.6.92

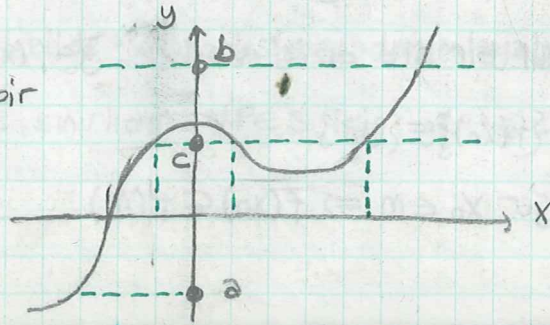
0 halde $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n_k} - y_0| = 0$

kabulümüz yanlış, teorem doğrudur.

Teorem 5.2.8. (Ara Değer Teoremi):

S bağlantılı bir küme ve f de S üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. a ve b , f nin S üzerinde aldığı iki değer ve $a < c < b$ ise

$f(b) = c$ olacak şekilde bir $p \in S$ noktası vardır.



ispat// Kabul edelim ki, $f(P) = c$ olacak şekilde S 'nin noktası 499

olmasın. O zaman ya $f(P) < c$ ya da $f(P) > c$ olur.

S bağlantılı olduğundan,

Örneğin; $A \cap B = \emptyset$, $\bar{A} \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olacak şekilde

$S = A \cup B$ yazılamaz.

Şimdi, $A = \{P | P \in S, f(P) < c\}$ ve $B = \{P | P \in S, f(P) > c\}$ olacak şekilde iki küme tanımlayalım.

$f(P_1) = a$ ve $f(P_2) = b$ olsun.

Denek ki P_1 , A 'da ve P_2 'de B 'dedir.

c 'den büyük olanlar B 'dedir. $\Rightarrow f(P_1) = a, f(P_2) = b$ olur.
 c 'den küçük olanlar A 'dedir.

$S = A \cup B$ olur. Yani bağlantısız olur. Bu bir çelişkidir. O halde MITAT kabulümüz yanlış, teorem doğrudur. //

(94-95 - Vize Soruları)

1- a) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ serisinin toplamını bulunuz.

b) $\sum_{i=1}^n \frac{(x-5)^n}{\sqrt{2}^n}$ serisinin toplamını bulunuz. Yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

2- Düzgün yakınsaklığı tanımlayınız ve $\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$ serisinin

a) Düzgün yakınsak olup olup olmadığını

b) Mutlak yakınsak " " " araştırınız.

3- Aşağıdaki integrallerin yakınsaklığını araştırınız.

a) $\int e^{-x} dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot e^{-x}}$ c) $\int_{-3}^6 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(6-x)}}$

4- $T = \{(x,y) | |x| + |y| < 1\}$ kümesinin; bağlantılı, sınırlı, kapalı olup olmadığını araştırınız ve $\partial T = ?$ S.E.E MITAT

5- $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \rightarrow 2x^2 + 3y$

$D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ fonksiyonun D üzerinde sürekli olup olmadığını araştırınız.

Çözümler : a) $|R_n(x)| = |f_{n1}(x) + f_{n2}(x) + \dots| < \varepsilon$ o.ş. ε 'a bağlı ve

x 'den bağımsız x_0 sayısı varsa, $R(x)$ kolonu ilk terim pozitif o.ş. seçilebilir.

$$R_n(x) = \frac{1}{x^2+(n+1)} + \frac{1}{x^2+(n+2)} + \frac{1}{x^2+(n+3)} - \frac{1}{x^2+(n+4)} + \dots < \varepsilon \text{ gittikçe azalır.}$$

Onun için fark her zaman pozitif olduğundan mutlak değer almaya gerek yoktur.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2+(n+1)} - \frac{1}{x^2+(n+2)} \right) + \left(\frac{1}{x^2+(n+3)} - \frac{1}{x^2+(n+4)} \right) + \dots > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+(n+1)} - \left(\frac{1}{x^2+(n+2)} - \frac{1}{x^2+(n+3)} \right) - \left(\frac{1}{x^2+(n+4)} - \frac{1}{x^2+(n+5)} \right) - \dots > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+(n+1)} > \left(\frac{1}{x^2+(n+2)} - \frac{1}{x^2+(n+3)} \right) + \left(\frac{1}{x^2+(n+4)} - \frac{1}{x^2+(n+5)} \right) + \dots \text{ çok büyük } n\text{'ler için,}$$

$$|R_n(x)| = |f_{n1}(x) + f_{n2}(x) + \dots| < \varepsilon. \quad \varepsilon, x\text{'e bağlı değildir. Düzgün yakınsaktır.}$$

21.12.1994

ÇARŞAMBA

5.3. Fonksiyonların Limitleri

TANIM 5.3.1.

Bir f fonksiyonu P_0 noktasının delik komşuluğunda tanımlanmış

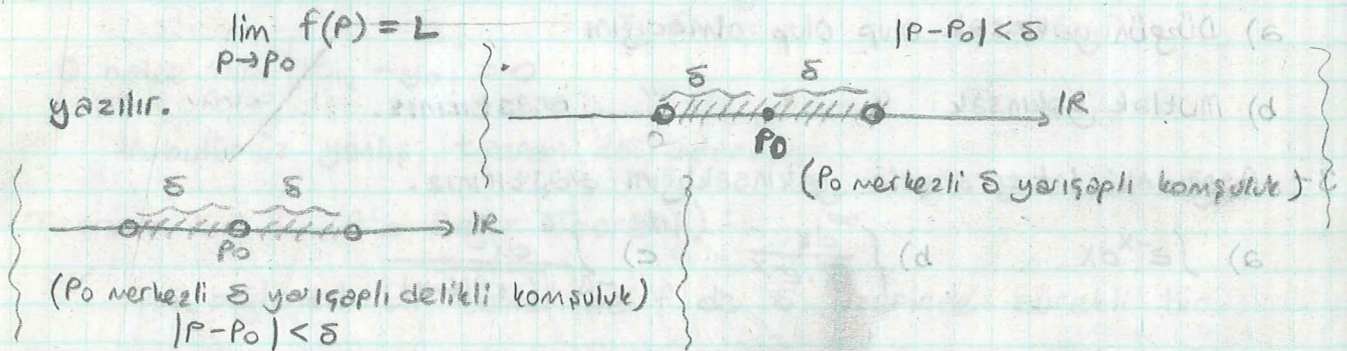
olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $0 < |P - P_0| < \delta$ koşulunu

'sağlayan P noktaları için,

$$|f(P) - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f nin P_0 noktasındaki limiti

L 'dir denir ve bu durumda,



TANIM 5.3.2.

P_0 noktasının komşuluğunda tanımlanan f fonksiyonunun P_0 nokta-

sında limiti varsa ve $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$ ise f fonksiyonu P_0

noktasında sürekli'dir denir.

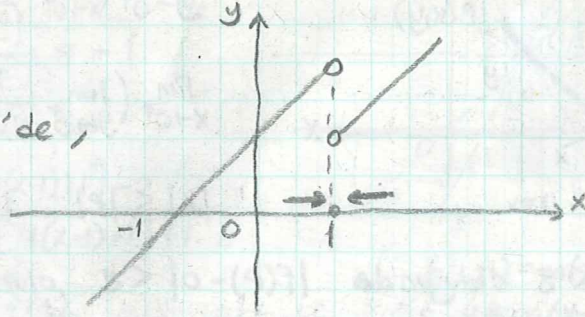
($f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ fonksiyonu $x=1$ noktasında tanımsızdır ve limiti 1'dir.) 501

örnek //

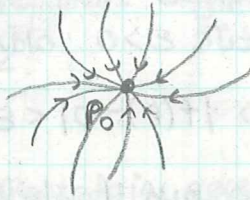
$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 1 \text{ ise} \\ x+1, & x < 1 \text{ ise} \end{cases} \quad x=1 \text{ 'de ,}$$

sürekli midir ?

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$



fonksiyonun $x=1$ noktasında limiti yoktur.



P_0 noktasına doğru veya eğriler ile yaklaşılabılır.

TANIM 5.3.3.

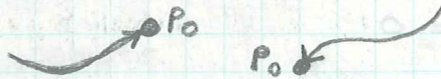
S üzerinde tanımlanmış (belki $P_0 \in S$ noktası hariç) bir fonksiyon f olsun. P noktası P_0 noktasına yaklaştığında $f(P)$ nin limitinin L olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall \epsilon > 0$ sayısı ve $\forall P \in S$ için $|P - P_0| < \delta$ olduğunda $|f(P) - L| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının var olmasıdır. Bu durumda P nin P_0 noktasındaki limiti L 'dir' denir ve ;

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$$

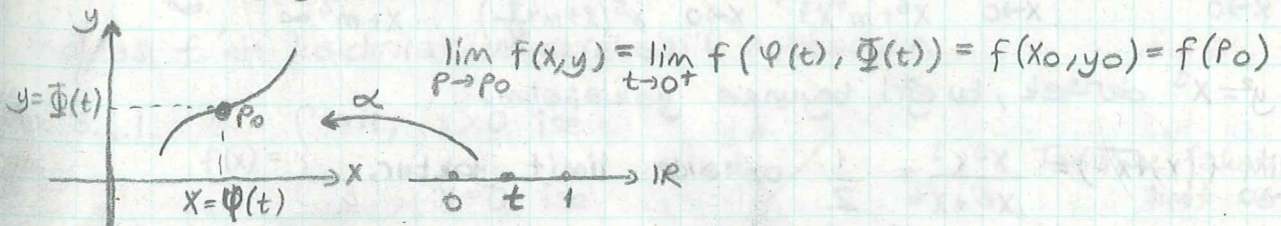
yazılır.

Örneğin; düzlemde bir eğri $x = \varphi(t)$, $y = \Phi(t)$ şeklinde verilebilir.

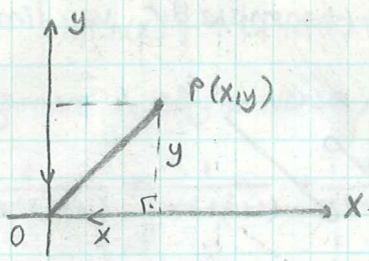
Veya bir yay şeklinde verilebilir ve bu eğri boyunca tek yönde yaklaşılabılır.



$P_0 = (x_0, y_0)$ olsun.



Örnek 5.3.1. $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ fonksiyonunun başlangıç noktasında limitinin olup olmadığını araştırınız.



$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{0}{\sqrt{y^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{\sqrt{x^2}} = 0$$

$$|x| \leq |P| \quad |y| \leq |P| \quad \{ |xy| = |x| \cdot |y| = |P| \cdot |P| = |P|^2 \}$$

$|P-0| < \delta$ olduğunda $|f(P)-0| < \varepsilon$ olur mu? Bakalım.

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq \frac{|P|^2}{\sqrt{P^2}} = \frac{|P|^2}{|P|} = |P| \quad \text{olur. O halde } \lim_{P \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ dir.}$$

$|P|=0$ dir. (yani ε 'den küçüktür. $\varepsilon > 0$ olduğu için, $\delta = \varepsilon$ almalıyız.)

$$|P-0| = |P| < \delta \Rightarrow \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(P)-0| < \varepsilon \text{ olur.}$$

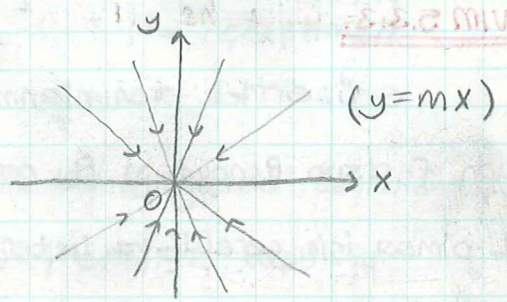
Örnek 5.3.2. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun başlangıç noktasındaki limitini araştırınız.

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{0}{y^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot mx}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1+m^2} \neq 0$$

($\forall m$ için değişik doğrulardır.)



O halde limit yoktur. (Başlangıç noktasında) (Esas süreksizlik noktası)

Örnek 5.3.3. $f(x,y) = \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$ fonksiyonunun başlangıç noktasındaki limitini araştırınız.

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{0}{y^4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x^6} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 m^2 x^2}{x^6 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 m^2}{x^5 (x + m^4 \frac{1}{x})} = \frac{m^2}{x + m^4 \infty} = \frac{m^2}{\infty} = 0$$

$y^2 = x^3$ dersek, bu eğri boyunca yaklaşalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \sqrt{x^3}) = \frac{x^3 x^3}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2} \quad \text{O halde limit yoktur.}$$

Örnek 5.3.4. $f(x,y) = \frac{x+y-2}{x-2y+1}$ fonksiyonunun (1,1) noktasındaki limitini araştırınız.

limitini araştırınız.

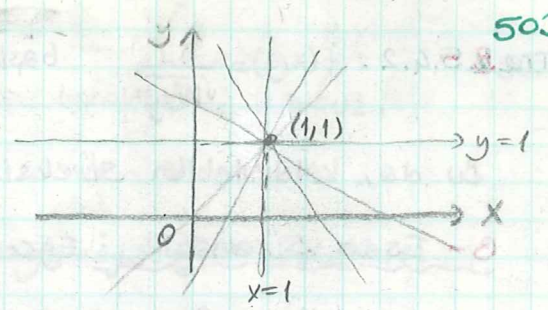
$$\lim_{y \rightarrow 1^+} \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+y-2}{x-2y+1} \right) = \lim_{y \rightarrow 1^+} \frac{y-1}{2-2y} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\lim_{y \rightarrow 1^+} \frac{x+y-2}{x-2y+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = +1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x, m(x-1)+1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + [m(x-1)+1] - 2}{x - 2[m(x-1)+1] + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)+m(x-1)}{(x-1)+2m(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(1+m)}{(x-1)(1+2m)}$$

$$= \frac{1+m}{1+2m} \quad m \text{ değıştikçe limit değışir.}$$



$$(y-1) = m(x-1)$$

$$y = m(x-1) + 1$$

$$x=1 \Rightarrow y=1$$

TANIM 5.3.4.

$\lim_{|P| \rightarrow \infty} f(P) = L$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall \varepsilon > 0$

sayısına karşılık her $|P| > N \in \mathbb{N}^+$ için

$$|f(P) - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}^+$ sayısının bulunmasıdır.

Örneğin: $\lim_{|P| \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+y^2+1} = 0$ dir.

5.4. Süreksizlikler

Çok değişkenli fonksiyonlarda süreksizlikler iki türlü incelenir.

A- Kaldırılabilen Süreksizlik. $F = \begin{cases} f(P), & P \neq P_0 \\ L, & P = P_0 \end{cases}$

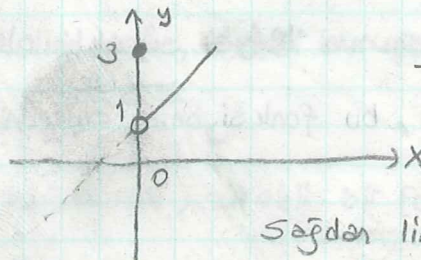
B- Esas Süreksizlik.

A- Kaldırılabilen Süreksizlik: Eğer $f(P_0)$ tanımlı ve $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$ mevcut fakat, P_0 noktasındaki $f(P_0) \neq L$ ise f fonksiyonu P_0 noktasında kaldırılabilen süreksizliğe sahiptir.

Yine f, P_0 noktasında tanımsız fakat $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L$ mevcut ise, P_0 noktası f 'nin kaldırılabilen süreksizlik noktasıdır.

Örnek 5.4.1.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \text{ ise} \\ 3, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$



Tanımsız fakat
limit vardır.

$x=0$ için $f(x)=1$ dersek

süreksizlik kalkar.

Sağdan limit 1 olur.

Örnek 5.4.2. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ başlangıç noktasında tanımsız fakat limiti vardır.

Bu da, kaldırılabilir süreksizliktir. (Örnek 5.3.1. den)

B- Esas Süreksizlik: Eğer $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ mevcut değil ve f , P_0 noktasında tanımlı değilse, P_0 noktası, f nin esas süreksizlik noktasıdır.

Örnek 5.4.3. $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^6}$ hangi nokta bu fonksiyonun, hangi türden süreksizlik noktasıdır.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{xy^3}{x^2+y^6} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x^6} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xy^3}{x^2+y^6} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{0}{y^6} = 0$$

P.2.3 MUVAT

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot m^3 x^3}{x^2 + m^6 x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2 m^3}{x^2 (1 + m^6 x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m^3}{1 + m^6 x^4} = 0$$

(0,0) süreksizlik noktasıdır. (Fonksiyonun limiti 0 noktasındaki değerine eşit değil)

$x=y^3$ eğrisi boyunca yaklaşırsak limiti $\frac{1}{2}$ olur.

0 halde (0,0) esas süreksizlik noktasıdır. (Örnek 5.3.3. benzeri)

((0,0) noktasında tanımlı değildir.) (Limit yok ve (0,0) da tanımlı değil.)

Örnek 5.4.4. $f(x) = x^{\sin x}$ hangi nokta bu fonksiyonun hangi türden süreksizlik noktasıdır?

$x=0$ da tanımsızdır.

$$y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln x = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{L'Hopital'den,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$\ln y = 0 \quad y = e^0 = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = 1$ dir. Kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.

Teorem 5.4.1. S sınırlı bir küme ve $\mathbb{R} = \partial S \cup S$ olsun. S üzerindeki bir

sürekli f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ 'ye sürekli olarak genişletilmesi için gerekli

ve yeterli koşul, bu fonksiyonun ^{side} düzgülü sürekli olmasıdır.

- 1- Genel terimi $P_n = (n, \frac{1}{n})$ olan $\{P_n\}$ dizisinin karakterini bulunuz.
- 2- Genel terimi $P_n = (\frac{n+1}{n}, \frac{(-1)^n}{n})$ olan " " " " " "
- 3- $\mathbb{R}^n$ de bir dizinin farklı iki noktaya yakınsayamayacağını gösteriniz.
- 4- Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir. Kanıtlayınız.
- 5- Genel terimi $a_n = \frac{1}{2^n}$ olan $\{a_n\}$ dizisinin karakterini bulunuz.
- 6- $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri verilmiş olsun. Eger $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ dir. Kanıtlayınız.
- 7- Aşağıdaki diziler için alt ve üst limitleri bulunuz.
 - a) $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ b) $\{b_n\} = \{(-1)^n (2 + \frac{3}{n})\}$ c) $\{c_n\} = \{\frac{n + (-1)^n (2n+1)}{n}\}$
- 8- Sıfıra yakınsayan bir dizi $\{a_n\}$ ve bunun aritmetik ortalaması q_n ise $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ olduğunu gösteriniz. (Σ, σ sigma)
- 9- Aşağıdaki dizilerin : inf, sup, liminf, limsup larını bulunuz.
 (Bu dizilerin genel terimleri aşağıda verilmiş olsun.)
 - a) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$ b) $b_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2}$ c) $c_n = (-1)^{n+1} (2n-1)$
 - d) $d_n = n^{1+(-1)^n}$ e) $e_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n}, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise} \\ 2 + \frac{1}{n}, & n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise} \\ 4 - \frac{1}{n}, & n \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise} \end{cases}$
- 10- $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \rightarrow F(x,y) = xy$ fonksiyonunun $S = \{(x,y) \mid |(x,y)| \leq r\}$ kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.
- 11- $f(x,y) = \frac{x}{y}$ fonksiyonunun $y=0$ hariç her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.
- 12- $F(x,y) = x^2 + 3y$ fonksiyonunun $P_n = (\frac{a}{n^2}, \frac{b}{n^2})$ olmak üzere $\{P_n\}$ dizisi için yakınsaklığı koruduğunu gösteriniz.
- 13- $f(x) = x^2$ sürekli fonksiyonunu kullanarak, sürekli bir fonksiyonun, eşikçe aşığa götürmeyebileceğini gösteriniz.
- 14- $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sürekli fonksiyonunu kullanarak, sürekli bir fonksiyonun kapalıya kapalıya götürmeyebileceğini gösteriniz.

15- Sinüs fonksiyonunun süreklilik özelliğini kullanarak,

$g(x) = \operatorname{cosec}(\sin \frac{1}{x})$ fonksiyonunun sürekli olduğu kümeyi bulunuz.

16- $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu verilmiş olsun. Eger $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$
 koşulunu sağlayacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}^+$ sayısı

varsa f fonksiyonuna LIPSCHITZ koşulunu sağlıyor denir. Bu tanıma göre,

gösteriniz ki Lipschitz koşulunu sağlayan her fonksiyon düzgün sürekli dir.

17- $f(x) = x^2$ fonksiyonu $0 < x < 1$ aralığında düzgün sürekli dir. Kanıtlayınız.

18- $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $0 < x < 1$ aralığında düzgün sürekli değildir. Kanıtlayınız.
(ör. 5.2.2. benzeri)

19- Aşağıdaki limitleri tartışınız.

a) $\lim_{P \rightarrow 0} \frac{x+y}{x^2+y^2}$

b) $\lim_{|P| \rightarrow \infty} \frac{xy - z^2}{x^2+y^2+z^2}$

c) $\lim_{|P| \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x^2+y^2}$

20- Aşağıdaki fonksiyonların sürekliliğini tartışınız.

a) $f(x, y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$ $(x, y) \neq (0, 0)$

b) $f(x, y) = \frac{x^2y^3}{x^4+y^6}$ $(x, y) \neq (0, 0)$ (çözümleri 3. örnekte 4 sayfa ileride)

Çözümler

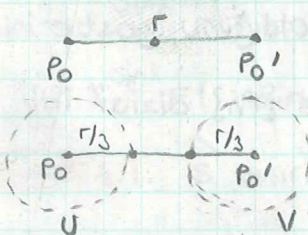
1- $P_n = (n, \frac{1}{n})$ (sonsuzsuz terim sonlu bir terime yakınsıyorsa yakınsaktır.)

$= (\infty, 0)$ o halde bu nokta sonludur. yakınsaktır. ($n = \infty$ için)

2- $P_n = (\frac{n+1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}) \rightarrow (1, 0)$ 'a yakınsar. yakınsaktır. ($n = \infty$ için)

$$P_1 = (2, -1) \quad P_2 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \quad P_3 = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}) \quad \dots \rightarrow (1, 0)$$

3- Kabul edelim ki, $\{P_n\}$ dizisi P_0 ve P_0' gibi iki noktaya yakınsasın.



$$|P_0 - P_0'| = r \quad \frac{r}{3} \text{ olsun.}$$

P_0 ve P_0' merkezli $\frac{r}{3}$ merkezli komsuluğu alalım. U ve V

$$U \cap V = \emptyset \text{ olur.}$$

Dizi bu noktalara ayrı ayrı yakınsarsa, bu noktaların komsuluğunda

dizinin sonsuz tane elemanı vardır. Ateşlet $\emptyset$ olamaz. O halde P_0 ve P_0'

farklı noktalar değildir. //

4- (Tanım 1.2.3 ten) $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad n_0 < m, n$

(507)

$\{a_n\}$ dizisi yakınsak olsun. $n_0 < m, n \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$?

$n_0 < n$ için $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$n_0 < m$ için $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$n_0 < m, n$ için $|a_n - a_m| = |a_n - a - a + a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

0 halde her yakınsak dizi, Cauchy dizisidir.

5- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} < 1$ azalandır. Aşağıdan sınırlı olmalıdır.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ Aşağıdan sınırlı azalan dizi yakınsak, yukarıdan sınırlı artan dizi de yakınsaktır. Bu dizi yakınsaktır.

6- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$?

$n_0 < n$ için (çok büyük n 'ler için), $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$ o.s. bir $\varepsilon > 0$ doğal sayısı vardır. Bunu gösterelim.

$n_0 < n$ için, $|a_n b_n - AB + AB - A b_n| \leq |b_n(a_n - A)| + |A(b_n - B)|$
 $\leq |b_n| |a_n - A| + |A| |b_n - B|$

$\forall n \in \mathbb{N}; |b_n| \leq M$ sınırlı bir sayıdır. (b_n yakınsak olduğundan)
 $\leq M |a_n - A| + |A| |b_n - B|$

$\{a_n\}$ dizisi yakınsak olduğundan $n_0 < n$ için $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$ olacak şekilde ve

$\{b_n\}$ dizisi " " " $n_0 < n$ için $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$ olacak şekilde

$\varepsilon > 0$ sayısı vardır. 0 halde $n_0 < n$ için,

$|a_n b_n - AB| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |A| \cdot \frac{\varepsilon}{2|A|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow |a_n b_n - AB| < \varepsilon$ olur. //

7- a) $a_n = (-1)^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = -1 \quad \overline{\lim} \{a_n\} = 1$ dir.

n tek $\Rightarrow \{-1, -1, \dots\}$, n çift ise $\{1, 1, \dots\}$ olur.

b) $b_n = (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ $n = \infty$ için,

n çift $\Rightarrow 2$ n tek $\Rightarrow -2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\} = -2 \quad \overline{\lim} \{b_n\} = 2$

802c) $c_n = \frac{n+(-1)^n(2n+1)}{n}$ n tek ise, $\lim \{c_n\} = -1$

n çift ise, $\lim \{c_n\} = 3$

8- $a_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ $n \rightarrow \infty$ için $a_n \rightarrow 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} + \dots + \frac{a_n}{n} \right) \rightarrow 0$

$n_0 < n$ için $|a_n| < \epsilon$ dur.

$n_0 < n$ için $|a_n| = \frac{|a_1 + a_2 + \dots + a_n|}{n} + \frac{(n-n_0)}{n} \cdot \epsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim |a_n| = 0$

Benzer şekilde, $\lim |a_n| = 0$ olur.

9- a) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$ $n \rightarrow \infty$ için $\lim \{a_n\} = \overline{\lim} \{a_n\} = 0$ dir.

$(-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{9}, \dots, \frac{(-1)^n}{2n-1}, \dots)$

$\text{Eküs} \{a_n\} = \frac{1}{3} = \sup \{a_n\}$ $\text{EBAS} \{a_n\} = -1 = \inf \{a_n\}$

b) $b_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$ n tek $\Rightarrow -1$ $\lim \{b_n\} = -1$

n çift $\Rightarrow 1$ $\overline{\lim} \{b_n\} = 1$

$(-\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, (-1)^n \frac{n+1}{n+2}, \dots)$

$\text{EBAS} \{b_n\} = 1 = \sup \{b_n\}$ $\text{Eküs} \{b_n\} = -1 = \inf \{b_n\}$

c) $c_n = (-1)^n(2n-1)$

$\lim \inf \{c_n\} = -\infty$ (Inferior)

$\lim \sup \{c_n\} = \infty$ (Superior)

d) $d_n = n^{1+(-1)^n}$

$(1, 4, 1, 16, 1, 36, 1, 64, 1, \dots, n^{1+(-1)^n}, \dots)$

$\inf \{d_n\} = 1$ $\sup \{d_n\}$ yok.

$\lim \inf \{d_n\} = 1$ $\lim \sup \{d_n\} = \infty$ ($\lim \{d_n\} = 1$, $\overline{\lim} \{d_n\} = \infty$)

e) $e_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n}, & n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise } (-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \dots, \frac{(-1)^{3n}}{3n}, \dots) \\ 2 + \frac{1}{n}, & n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise } (3, \frac{7}{4}, \frac{15}{7}, \frac{21}{10}, \dots, 2 + \frac{1}{3n-2}, \dots) \\ 4 - \frac{1}{n}, & n \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise } (\frac{7}{2}, \frac{19}{5}, \frac{31}{8}, \frac{43}{11}, \dots, 4 - \frac{1}{3n-1}, \dots) \end{cases}$

$$\{e_n\} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{9}, \dots, e_1, \dots\right\}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ için } \inf \{e_n\} = -\frac{1}{3} \quad \sup \{e_n\} = \frac{1}{3}$$

Negatif olanlar sıfıra, pozitif olanlar dörde yakınsar.

$$\lim \{e_n\} = 0 \quad \overline{\lim} \{e_n\} = 4$$

10- $|F(x,y) - F(x_0,y_0)| < \varepsilon$ o.s. bir x_0,y_0 komşuluğunun δ komşuluğu bulunmalıdır.

$$|x y - x_0 y_0| = |x y - x_0 y + x_0 y - x_0 y_0 + x_0 y_0 - x_0 y + x_0 y - y x_0 + y x_0|$$

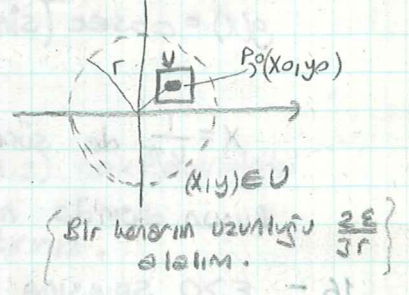
$$= |x(y-y_0) + y_0(x-x_0) + x_0(y_0-y) + x_0(y-y_0)|$$

$$\leq |y_0||x-x_0| + |x_0||y-y_0| + |x-x_0||y-y_0|$$

$$\leq r|x-x_0| + r|y-y_0| + |x-x_0||y-y_0|$$

$$\leq r \cdot \frac{\varepsilon}{3r} + r \cdot \frac{\varepsilon}{3r} + \frac{\varepsilon^2}{9r^2} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{9r^2}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \text{ olur.}$$



O halde $\forall (x_0, y_0) \in S$ için sürekli.

11- $f(x,y) = \frac{x}{y}$, tüm $\mathbb{R}^2$ de sürekli olduğunu gösterelim.

$P_n = (x_n, y_n)$ olsun. $x_n \rightarrow x_0$ $y_n \rightarrow y_0$, $y_0 \neq 0$ olsun.

(Örneğin: $P_0 \neq (x_0, 0)$ olmalıdır.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \rightarrow P_0 \text{ ise } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rightarrow x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \rightarrow y_0 \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = f(P_0) = \frac{x_0}{y_0} \text{ olur.}$$

Bu fonksiyon, $(f(x,y) = \frac{x}{y})$ $y \neq 0$ için her yerde sürekli.

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0} \right| = \left| \frac{x y_0 - y x_0}{y y_0} \right| = \left| \frac{x y_0 - y x_0 + x_0 y_0 - x_0 y_0}{y y_0} \right|$$

$$\leq \frac{|y_0||x-x_0| + |x_0||y-y_0|}{|y||y_0|} \quad \left\{ \begin{array}{l} |y| > \delta, |y_0| > \delta \\ \delta > 0 \end{array} \right\}$$

$$< \frac{|y_0||x-x_0| + |x_0||y-y_0|}{\delta^2} \quad |y-y_0| < \frac{\varepsilon \delta^2}{2|x_0|} \text{ seçelim.}$$

$$|x-x_0| < \frac{\varepsilon \delta^2}{2|y_0|} \text{ seçelim.}$$

$$< \varepsilon \text{ olur. //}$$

$$12- f(x,y) = x^2 + 3y \quad P_n = \left(\frac{a}{n^2}, \frac{b}{n^2}\right)$$

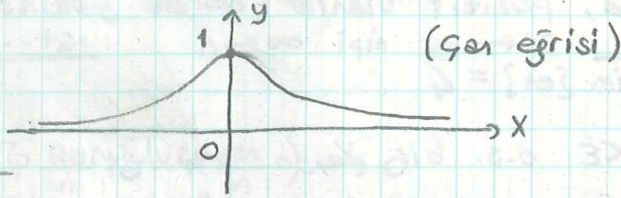
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^2}{n^4} + 3\frac{b}{n^2}\right) = 0 \quad (\text{orjinin bileşenidir.})$$

$$0 \text{ halde, } \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = (0,0) = P_0 \text{ olur. //}$$

13- $f(x) = x^2$ $U =]-\infty, +\infty[$

$f(U) = [0, \infty[$ eşik değildir.

14- $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



$U =]-\infty, +\infty[$

$f(U) =]0, 1]$

↓ kapalı da olsa, eşik eşik, kapalı, kapalıya götürmez.

15-

$g(x) = \operatorname{cosec}(\sin \frac{1}{x})$

$\sin(\sin \frac{1}{x}) = 0$ $\sin \frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = k\pi$ olmalı, $k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{1}{k\pi}$ de süreksizdir.

Bunun dışında her yerde sürekli dir.

16- $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $|x-y| < \delta$ olduğunda,

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde (noktadan bağımsız) bir δ sayısının varlığını gösterelim.

$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ (Lipschitz koşulu)

$|x-y| < \delta \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{M}$ seçersek ($\forall x, y \in \mathbb{R}$)

noktadan bağımsız olarak böyle bir δ seçilebileceği için fonksiyon düzgün süreklidir.

17- $f(x) = x^2$, $0 < x < 1$ bu aralığı,

$S = \{x \mid 0 < x < 1\}$ şeklinde tanımlayalım.

$x, x_0 \in S$, $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde noktadan bağımsız bir δ sayısı bulmalıyız.

$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0| < 2|x - x_0|$

$\left. \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < x_0 < 1 \\ 0 < x + x_0 < 2 \end{array} \right\}$

0 halde $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ seçersek, fonksiyon düzgün süreklidir.

19- a) $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{x+y}{x^2+y^2}$ $P = (x, y)$ $P \rightarrow 0 \Rightarrow (x, y) \rightarrow (0, 0)$

Hangi yönde yaklaşırsak payda sıfır olur. $y = mx$ doğrusuyla yaklaşılim.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+mx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+m}{x+m^2x} = \frac{1+m}{0} = \infty$ Limit yoktur.

(veya sonsuzdur.)

b) $\lim_{|P| \rightarrow \infty} \frac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad P = (x, y, z)$

511

$(x, 0, 0)$ için, $\lim = 0$, y eksenini için de sıfır ve z için -1 olur.

Yani limit yoktur.

c) $\lim_{|P| \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x^2+y^2} \quad P = (x, y)$

x eksenini boyunca gidersek limit sıfırdır, y için de sıfırdır.

$\lim_{|P| \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$ olur.

Karışık Örnekler :

1 - $f(x, y) = \begin{cases} 3xy & , (x, y) \neq (1, 2) \\ 0 & , (x, y) = (1, 2) \end{cases}$ fonksiyonunun $(1, 2)$ noktasındaki sürekliliğini araştırınız.

fonksiyon $(1, 2)$ noktasında tanımlıdır.

$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} f(x, y) = ? \quad f(x, y) = 3xy$ fonksiyonu süreklidir.

$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} f(x, y) = 6 ?$ Kaldırılabilir süreksizlik noktası mıdır? Ona bakalım.

$|x-1| < \delta, |y-2| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 6| < \epsilon$

$- \delta < x - 1 < \delta \quad - \delta < y - 2 < \delta$
 $1 - \delta < x < 1 + \delta \quad 2 - \delta < y < 2 + \delta$
 $3 - 3\delta < 3x < 3 + 3\delta$

$\Rightarrow 3 - 3\delta < 3x < 3 + 3\delta$

$\times \quad 2 - \delta < y < 2 + \delta$

$6 - 9\delta + 3\delta^2 < 3xy < 6 + 9\delta + 3\delta^2$

$\Rightarrow -9\delta + 3\delta^2 < 3xy - 6 < 9\delta + 3\delta^2$

$\delta^2 \leq 1$ yerine δ yazılabilir.

$\delta \leq 0$ için

$-9\delta + 3\delta < 3xy - 6 < 9\delta + 3\delta$

$\Rightarrow -12\delta < 3xy - 6 < 12\delta$

$\Rightarrow |3xy - 6| < 12\delta \quad \delta = \frac{\epsilon}{12}$ seçilirse,

$\Rightarrow |3xy - 6| < \epsilon$ olur.

Bu ise kaldırılabilir bir süreksizlik noktasıdır.

2 - $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $0 < x < 1$ aralığında düzgün sürekli midir?

Çözüm, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$ (Pay ve payda $\sqrt{x} + \sqrt{x_0}$ ile çarparak.)

$$\Rightarrow \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \text{ olur. Buradan,}$$

$\delta = \varepsilon \sqrt{x_0}$ seçersek,

$$\Rightarrow \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}}, \quad \delta \text{ hem } \varepsilon, \text{ hem de } x_0 \text{ 'a bağımlı olduğu için}$$

(yani hem verilen noktaya hem de ε 'a bağımlı)

Verilen fonksiyon düzgün sürekli değildir.

3 - 20. sorunun cevapları :

a) $f(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$, $(x,y) \neq (0,0)$ sürekliliği tartışınız.

Çözüm, $f(0,0) = \frac{0}{0}$ tanımlı değildir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{|x|+|y|} \right) = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{|x|+|y|} \right) = 0$$

$y=x$ doğrusu boyunca yaklaşalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{|x|+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x| \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \cdot |x|}{2|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{2} = 0$$

$|x| < \delta = \varepsilon$, $|y| < \delta = \varepsilon$ seçelim. $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$? bakalım.

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{xy}{|x|+|y|} - 0 \right| = \frac{|xy|}{|x|+|y|} = \frac{|x| \cdot |y|}{|x|+|y|}$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - 0| < \frac{\delta \cdot \delta}{\delta + \delta} = \frac{\delta^2}{2\delta} = \frac{\delta}{2} < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon \text{ olur.}$$

0 halde limiti sıfırdır ve kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.

b) $f(x,y) = \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6}$, $(x,y) \neq (0,0)$ sürekliliği tartışınız.

$$\text{Çözüm, } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} \right) = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} \right) = 0$$

$y^3 = x^2$ yani $y = x^{2/3}$ eğrisi boyunca yaklaşırsak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^{2/3}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (x^{2/3})^3}{x^4 + (x^{2/3})^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

0 halde limit yoktur. Esas süreksizlik noktasıdır.

4 - $f(x) = x^x$ fonksiyonu $x > 0$ değerleri için sürekli midir. Bu fonksiyon 0 5/3

noktasında sürekli midir? Süreksiz midir? Nasıl süreksizdir?

Çözüm // $f(0) = 0^0$, fonksiyon 0 noktasında tanımlı değil.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \text{ olup,}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ L'Hopital'den}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \text{ olur. Buradan } \ln y = 0 \text{ ve } y = e^0 = 1 \text{ olur.}$$

fonksiyon 0 noktasında tanımlı değildir ve limiti 1 dir.

$$F = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ kaldırılabılır süreksizlik noktasıdır.}$$

5 - $g(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu 0 noktasında sürekli midir? Araştırınız.

Çözüm // $x > 0$ için $g(x)$ tanımlıdır.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \neq 2 = g(0) \text{ kaldırılabılır süreksizlik noktasıdır.}$$

$$F = \begin{cases} g(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ şeklinde tanımlanan fonksiyon sürekli dir.}$$



1.1. ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

TANIM 1.1.1.

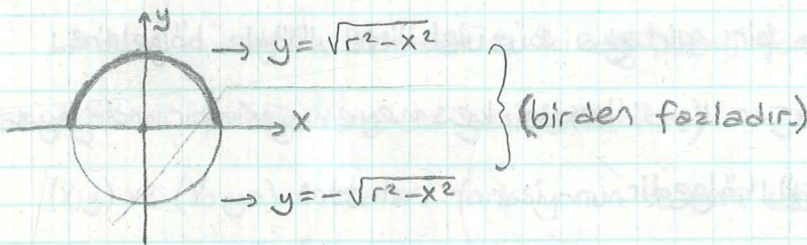
$A_1, A_2, \dots, A_n$ n-tane küme ve B 'de başka bir küme olsun.

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ den B 'ye giden her fonksiyona n-değişkenli fonksiyon denir ve

$$f: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \longrightarrow B$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

yazılır. Eğer $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ise $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'ye bağımsız değişken z 'ye de bağımlı değişken denir. $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gösterimi, fonksiyonun açık gösterimidir. (yani içerisinde hangisinin bağımlı, hangisinin bağımsız değişken olduğu belli.) $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$ gösterimi ise fonksiyonun kapalı gösterimidir. (yani içerisinde hangisinin bağımlı, hangisinin bağımsız değişken olduğu belli değil.)

Fonksiyonun kapalı gösterimi birden çok fonksiyon gösterir. Örneğin; $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ fonksiyonunu ele alalım. Eğer burada y 'yi (bağımlı) x 'e bağımlı olarak (x 'i bağımsız değişken olarak) alırsak, $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ açık gösterimdir ve $y = f(x)$ biçimindedir.



Çok değişkenli fonksiyonları tanım (1.1.1) deki gibi tanımlayabileceğimiz gibi, $C \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ olmak üzere;

$$f: C \longrightarrow B$$

biçiminde de tanımlayabiliriz. Burada C 'ye fonksiyonun tanım kümesi, B 'ye fonksiyonun değer kümesi denir. (Bazen 'de küme yerine bölge sözcüğü kullanılır.

TANIM 1.1.2

$S \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilmiş olsun. Eğer S kümesi boş olmayı ve bir değerin sınır noktalarını (kapanısını) kapsamayan iki A ve B kümelerine ayrılamiyorsa S kümesine bağlantılı küme denir. Bağlantılı açık kümeye bölge denir.

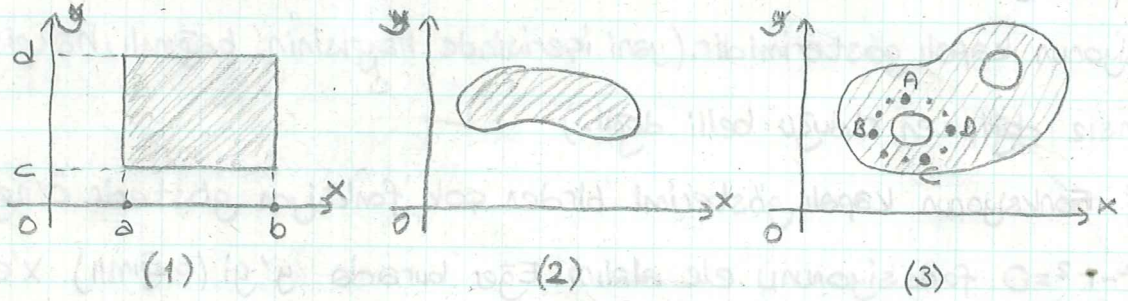
Bazı analiz kitapları bölgeyi aşağıdaki biçimde tanımlar.

TANIM 1.1.3.

Bir S kümesi iç noktalardan ya da dış noktalardan ve sınır noktalarından oluşuyorsa, S 'ye bölge denir. Bütün sınır noktalarını kapsayan bölgeye kapalı bölge, iç noktalarından oluşan bölgeye de açık bölge denir.

Açık bölgeye bazen domain de denir.

Örnek //



(1) ve (2) basit bağlantılı, (3) çok bağlantılı bölgedir.

Eğer bir bölge içinde herhangi bir kendi kendini kesmeyen eğri yine bu bölgenin içinde bulunan bir noktaya büzülebilirse, böyle bölgelere basit bağlantılı bölge; eğer kendi kendini kesmeyen eğri bir noktaya büzülemiyorsa çok bağlantılı bölgedir.

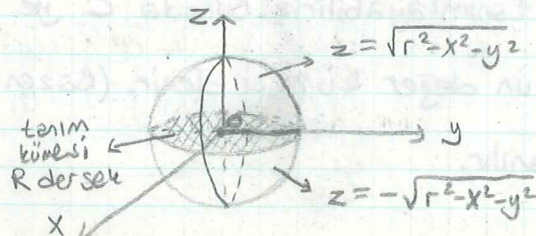


• $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ $\mathbb{R}^3$ 'de küredir.

$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ $z > 0$ tanımlı olduğu yeri bulalım.

$r^2 = x^2 + y^2 \geq 0$ olur.

$R = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$



- $\mathbb{R}^2$ de $f(x,y)=0$ fonksiyonun kapalı tanımı (gösterimidir.) dır.

x,y düzleminde eğridir. $y=f(x)$ a sık gösterimdir.

$F(x,y,z)=0$, $\mathbb{R}^3$ de yüzey gösterir. $z=f(x,y)$, $\mathbb{R}^3$ de yüzey gösterir.

$F(x,y,z,w)=0$, $\mathbb{R}^4$ de bir hiper yüzeydir.

$x^2+y^2+z^2+w^2=a^2$, $\mathbb{R}^4$ de yarıçapı a olan, hiper küredir.

$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=a^2$, $\mathbb{R}^n$ de yarıçapı a olan, hiper küredir.



(Tanımı kürede ise bağlantılıdır.)

$$A \neq \emptyset \quad B \neq \emptyset \quad S = A \cup B$$

$A \cap B = \emptyset \quad B \cap A = \emptyset$ ise S bağlantılı değildir.

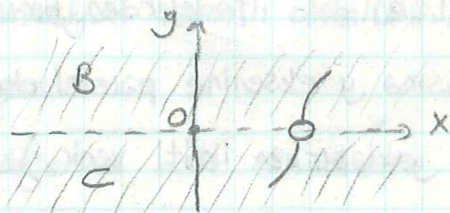
- $A = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ bir bölge midir?

Bağlantılı, kapalı bölgedir. (1. şekildaki kümeyi gösterir.)

- $B = \{(x,y) \mid y > 0\}$ bölgedir.

- $C = \{(x,y) \mid y < 0\}$ bölgedir.

- $S = B \cup C$ olsun. S kümesi bölge midir?



iki kümenin birleşimi bağlantılı değildir. Bağlantılı olmadığı için S bölge değildir.

1.2. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik.

TANIM 1.2.1.

Limit ve süreklilik tanımlarını iki değişkenli fonksiyonlarda yapacağız.

(Çok değişkenli fonksiyonlara da genişletilebilir.)

(x,y) ve (x_0,y_0) noktaları fonksiyonun tanım kümesine ait noktalar olsun...

Eğer $\varepsilon > 0$ istenildiği sayıdan daha küçük bir sayı olmak koşuluyla,

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad 0 < |y - y_0| < \delta \quad \text{olduğunda,}$$

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon$$

bağıntısı sağlanacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$ için

$f(x,y)$ nin limiti L dir denir ve bu limit ; $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = L$ ya da

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ biçiminde gösterilir.

Bu tanımdan; (x,y) noktası, (x_0,y_0) noktasına hangi eğri boyunca yaklaşıyorsa yaklaşıyor, tanımdaki koşullar sağlanıyorsa $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$ için $f(x,y)$ nin limiti L olduğu anlaşılmalıdır. Yani (x,y) noktasının (x_0,y_0) noktasına yaklaşma şekline (bişimine) bağlı değildir. Denek oluyor ki eğer L limiti mevcut ise özel olarak;

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y_0) = L \\ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0,y) = L \end{array} \right\} \text{----- (1.2.1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right) = L \\ \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right) = L \end{array} \right\} \text{----- (1.2.2)}$$

dir. ((1.2.2)deki ifadelerden birincisi, parantez içindeki (x,y) noktası (x_0,y_0) noktasına y eksenine paralel doğrultuda, diğeri x eksenine paralel doğrultuda yaklaşıırken limiti verir.)

Örnek 1.2.1. $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ $(0,0)$ 'daki lim. ?

$$\text{Çözüm // } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = 1 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = -1 \end{array} \right\} \text{limiti yoktur.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < |x-x_0| < \delta \\ 0 < |y-y_0| < \delta \\ (x,y) \neq (x_0,y_0) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{hiçbir zaman karşılaşmaz.} \end{array}$$

$$y = mx \text{ için, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-mx}{x+mx} = \frac{1-m}{1+m}$$

eğim değiştiği için bu ifade değişir. limit yoktur.

Örnek 1.2.2. $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ $(0,0)$ 'daki lim. ?

$$\text{Çözüm // } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0 \end{array} \right\} y = mx \text{ doğrusu boyunca yaklaşıalım.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot mx}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

m değiştiği için farklı değerler alır. limiti yoktur.

Örnek 1.2.3. $f(x,y) = \frac{x^2 + 2xy - 3y^2}{2x^2 + 3xy - 5y^2}$ $(1,1)$ 'daki lim. ?

$y-1 = m(x-1)$ doğrusu boyunca yaklaşılmalıdır.

$f(x,y)$ fonksiyonunun tanım kümesine ait bir nokta (x_0, y_0) olsun. $\varepsilon > 0$ istenildiği sayıdan daha da küçük bir sayı olmak koşuluyla eğer, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ olduğunda,

$$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir δ sayısı varsa, $f(x,y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında süreklidir.

Burada da (x,y) noktası, (x_0, y_0) noktasına istenildiği kadar yaklaşıp fakat hiçbir zaman (x_0, y_0) noktası ile çakışmaya caktır.

Görülüyor ki, $f(x,y)$ fonksiyonunun bir (x_0, y_0) noktasında sürekli olması için şu üç koşulun sağlanması gerekmektedir :

- 1- (x_0, y_0) noktasının bir komşuluğunda fonksiyon tanımlı olmalıdır.
- 2- Fonksiyonun bu noktada bir limiti olmalıdır.
- 3- Bu limit bu noktadaki fonksiyonun değeriyle eşit olmalıdır.

(Bu tanım bir noktadaki sürekliliği verir.)

TANIM 1.2.3.

Tanım bölgesinin her noktasında sürekli olan bir fonksiyona bu bölgede süreklidir denir.

Daha önce gördüğümüz gibi çok değişkenli fonksiyonlarda süreksizlik, kaldırılabilen, esas süreksizlik gibi iki türlü olduğunu biliyoruz.

Örnek 1.2.4. Örnek (1.2.3) deki fonksiyon $(1,1)$ noktasında sürekli midir?

Çözüm Bu fonksiyon $(1,1)$ de tanımlı olmadığı için (limiti yoktur.) süreksizdir.

1.3. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Türev.

(Tanımı iki değişkenli fonksiyonlarda yapacağız. Bu çok değişkenli fonksiyonlara genişletilebilir.)

Bir değişkenli fonksiyonlarda türev; fonksiyonun artma miktarının değişkenin artma miktarına oranının, değişkenin artma miktarı sıfıra giderken bir limiti varsa bu limite türev denir idi. Yani :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \text{ idi.}$$

Çok değişkenli fonksiyonlarda değişkenlerden biri hariç diğerleri sabit kabul edilirse bu fonksiyon artık bir değişkenli fonksiyondur.

Örneğin; $z = f(x, y)$ fonksiyonunda $y = y_0$ sabit kabul edilirse,

$z = f(x, y_0)$ fonksiyonu bir değişkenli, yani x 'e bağlı bir fonksiyondur.

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevi tanımlayalım.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \text{ nin bir limiti varsa } f(x, y) \text{ fonksiyonunun}$$

x değişkenine göre türevi denir ve bu türev $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, f_x, z_x$ şekillerinden biriyle (x değişkenine göre kısmî (parşalı) türev) gösterilir.

Benzer şekilde $z = f(x, y)$ fonksiyonunun y değişkenine göre kısmî türevi de

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \text{ oranının bir limiti varsa bu limite } z = f(x, y)$$

fonksiyonunun y 'ye göre parşalı türevi denir ve $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}, f_y, z_y$ şekillerinden biriyle gösterilir.

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun x_1 değişkenine göre parşalı (kısmî) türevini de,

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_1} \text{ nin bir limiti varsa}$$

bu limite, $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gibi n değişkenli fonksiyonun x_1 değişkenine göre parşalı türevi denir ve

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_1}, f_{x_1}, z_{x_1} \text{ şeklinde (bir noktada türev) yazılır.}$$

Örnek 1.3.1. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = u$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ? \quad \frac{\partial f}{\partial z} = ?$$

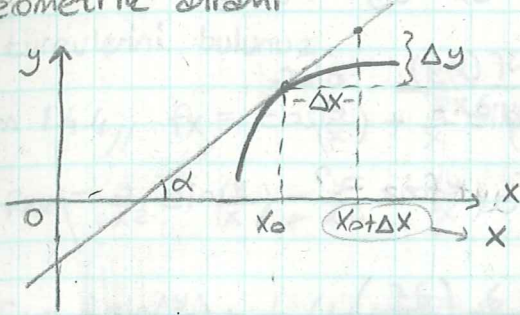
Çözüm // $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{u} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{u}$$

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasındaki $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ nin anlamı nedir, bakalım. (geometrik olarak)

Bir değişken $y = f(x)$ fonksiyonunun $X = x_0$ noktasındaki türevinin geometrik anlamı



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan \alpha = f'(x_0) \text{ idi.}$$

$F(x, y, z) = 0$ $\mathbb{R}^3$ de kapalı yüzey belirtiyor idi.

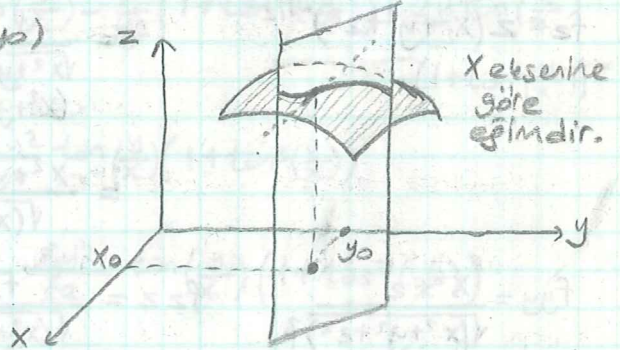
- $z = f(x, y)$ fonksiyonu $z = f(x, y)$ yüzeyi üzerinde bir eğri gösterir, ki bu eğri $z = f(x, y)$ yüzeyi ile $y = y_0$ düzleninin arakesiti olan bir eğridir.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0)$$

$z = f(x, y)$ yüzey idi. $\downarrow f(x, y_0)$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f_y(x_0, y_0)$$

$z = f(x, y)$ y eksenine göre eğimlidir.



Yani $z = f(x, y)$ yüzeyi ile $X = x_0$ düzleninin arakesiti olan eğrinin y eksenine göre eğimlidir.

1.4. Yüksek Mertebeden Kısmî Türevler

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ parçalı türevleri ;

x, y nin fonksiyonlarıdır. Eğer,

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 'in yine x 'e göre türevi varsa bu türev $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ ile gösterilir. Ve buna $z = f(x, y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre ikinci basamaktan kısmî (parçalı) türevi denir. Kısaca bu türev,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{xx}, z_{xx} \text{ şekillerinden biriyle gösterilir.}$$

Yine $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ in y 'ye göre türevi varsa bu türev $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ile gösterilir.

Benzer şekilde $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ nin, y 'ye göre türevi varsa $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ile gösterilir. Yine,

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ nin, x 'e göre türevi varsa, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ile gösterilir.

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ nin y 'ye göre türevi $\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y \partial x^2}$ olur.

Örnek 1.4.1. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = ?$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$f_x = x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \quad f_{xx} = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (2x)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot x$$

$$f_y = y(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \quad = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} - x^2(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$f_z = z(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \quad = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)}} - \frac{x^2}{\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(1)}} \\ = \frac{x^2+y^2+z^2 - x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$f_{yy} = \frac{x^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \quad f_{zz} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} //$$

Örnek 1.4.2. $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = ?$

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$f_x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$f_{xx} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)}} + \frac{3x^2}{\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(1)}}$$

$$f_{xx} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

$$f_{yy} = \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

$$f_{zz} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0 //$$

Örnek 1.4.3. $f(x,y,z) = \left(\frac{x+y+z}{x+y-z}\right)^n \Rightarrow x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = ?$

Örnek 1.4.4. $f(x,y) = x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \tan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = ?$

Örnek 1.4.5. $f(x,y) = x^2 y + 2x^3 \Rightarrow f_x, f_{xx}, f_y, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$

türevlerini bulunuz.

Çözüm 1.4.4 // $f_x = \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} (1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right))$

$$f_{xx} = \frac{y}{x^2} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x^3} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3} (1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right)) + \frac{2y^2}{x^4} \tan\left(\frac{y}{x}\right) \cdot (1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right))$$

$$f_y = -\sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} (1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right))$$

$$f_{yy} = -\frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2}{x^2} \tan\left(\frac{y}{x}\right) (1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right))$$

$$f_{xy} = -\frac{1}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2} (1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right)) - \frac{2y}{x^3} \tan\left(\frac{y}{x}\right) \cdot (1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right))$$

$$x^2 f_{xx} = \frac{y^2}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x} (1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right)) + \frac{2y^2}{x^2} \tan\left(\frac{y}{x}\right) (1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right))$$

$$2xy f_{xy} = \frac{2y^2}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2y}{x} (1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right)) - \frac{4y^2}{x^2} \tan\left(\frac{y}{x}\right) (1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right))$$

$$y^2 f_{yy} = -\frac{y^2}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y^2}{x^2} \tan\left(\frac{y}{x}\right) (1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right))$$

$$x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$$

Çözüm 1.4.3 // $f_x(x,y,z) = n \left(\frac{x+y+z}{x+y-z}\right)^{n-1} \left(\frac{x+y-z-x+y-z}{(x+y-z)^2}\right)$

$$f_y(x,y,z) = n \left(\frac{x+y+z}{x+y-z}\right)^{n-1} \left(\frac{-x-y+z-x+y-z}{(x+y-z)^2}\right)$$

$$f_z(x,y,z) = n \left(\frac{x+y+z}{x+y-z}\right)^{n-1} \left(\frac{x+y-z+x-y+z}{(x+y-z)^2}\right)$$

$$x \cdot f_x(x,y,z) = n \left(\frac{x+y+z}{x+y-z}\right)^{n-1} \frac{2(y-z)x}{(x+y-z)^2}$$

$$y \cdot f_y(x,y,z) = n \left(\frac{x+y+z}{x+y-z}\right)^{n-1} \frac{-2xy}{(x+y-z)^2}$$

$$z \cdot f_z(x,y,z) = n \left(\frac{x+y+z}{x+y-z}\right)^{n-1} \frac{2xz}{(x+y-z)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot f_x(x,y,z) \\ y \cdot f_y(x,y,z) \\ z \cdot f_z(x,y,z) \end{array} \right\} x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

1.5. Parçalı Türevlerin Varlığı ve Süreklilik

Bir değişkenli $y=f(x)$ fonksiyonunda $x=x_0$ noktasında fonksiyon türevlenebiliyorsa, fonksiyon $x=x_0$ noktasında sürekli idi. (Fakat tersi her zaman doğru değildir.)

İki değişkenli $z=f(x,y)$ fonksiyonu için buna benzer teoremi ifade edip tanımlayalım.

Teorem 1.5.1. Eğer bir B bölgesinin her noktasında $f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ parçalı türevleri mevcut ve sınırlı iseler $z=f(x,y)$ fonksiyonu bu bölgede süreklidir.

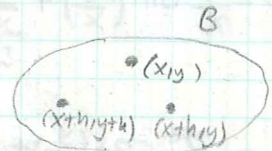
İspat // h ve k artma miktarlarını "öyle küçük seçelim ki $\forall (x,y) \in B$ için $(x+h,y) \in B$ için $(x+h,y+k)$ ve $(x+h,y)$ noktaları

B nin elemanları olsun. ve

$$f(x+h,y+k) - f(x,y)$$

$$\left. \begin{array}{l} x+h \rightarrow x \\ y+k \rightarrow y \end{array} \right\} \text{ h ve k sıfır olur.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x-x_0| < \delta \\ |y-y_0| < \delta \\ |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon \end{array} \right.$$



$$|f(x+h,y+k) - f(x,y)| = |f(x+h,y+k) - f(x+h,y) + f(x+h,y) - f(x,y)|$$

$$\leq |f(x+h,y+k) - f(x+h,y)| + |f(x+h,y) - f(x,y)|$$

$$\leq |k f_y(x+\theta_1 h, y+\theta_1 k)| + |h f_x(x+\theta_2 h, y)|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq c \leq b \\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} 0 < \theta_1 < 1 \\ y < y+\theta_1 k < y+k \end{array} \right.$$

$$\textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} [x, x+h] \\ 0 < \theta_2 < 1 \\ x < x+\theta_2 h < x+h \end{array} \right.$$

$\forall x,y \in B$ için $f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ mevcut ve sınırlı.

sınırlı olduğundan (hipotezden);

$$|f_x(x+\theta_2 h, y)| < M \text{ ve } |f_y(x+h, y+\theta_1 k)| < M \quad (M \text{ sınırlıdır, sonludur.})$$

yazılabilir. O halde,

$$\Rightarrow |f(x+h,y+k) - f(x,y)| \leq M(|h|+|k|)$$

$h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ için fonksiyonun artma miktarı sıfıra yaklaşır.

$$\left\{ \begin{array}{l} |x+h-x_0| < \delta \\ |y+k-y_0| < \delta \\ |h| < \delta \\ |k| < \delta \end{array} \right. \quad \varepsilon \text{ dan küçük bir } \delta \text{ sayısı bulunur.}$$

$z=f(x,y)$ fonksiyonu B deki herhangi

bir (x,y) noktasında sürekli'dir. Her bölge için de (x,y) noktaları B 'de sürekli olur.

Şimdi $z=f(x,y)$ fonksiyonunun hangi koşullar altında karışık terimlerinin türevlerinin eşit olduğunu gösteren türevi ifade edip kanıtlayalım.

Teorem 1.5.2. Bir $z=f(x,y)$ fonksiyonunun ikinci basamaktan $f_{xy}(x,y)$ ve $f_{yx}(x,y)$ parçalı türevleri, fonksiyonun B tanım bölgesinde x ve y 'nin sürekli fonksiyonları iseler, B bölgesinin iç kısmındaki her noktada

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \quad \text{dir.}$$

İspat, $\forall h,k$ artma miktarları için $(x_0, y_0); (x_0+h, y_0) + (x_0, y_0+k)$, (x_0+h, y_0+k) noktalarını gözönüne alalım. Bu artma miktarları için Bu üç nokta B nin içinde olsun.

$$F = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)$$

yardımcı fonksiyonunu alıp, ikiserli gruplandırıp, ortalama değer teoremini uygulayalım.

$$F = h \{ f_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k) - f_x(x_0+\theta_1 h, y_0) \} \quad (y_0 \text{ da artma var})$$

$$0 < \theta_1 < 1 \quad (\text{Artma miktarları aynı olup } h \text{ 'tir.})$$

$$x_0 < x_0 + \theta_1 h < x_0 + h$$

$$F = h k f_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) \quad \text{--- (1.5.1.)}$$

Aynı F fonksiyonunu başka türlü gruplandıralım.

$$F = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0) \quad 0 < \theta_1' < 1$$

$$F = k \{ f_y(x_0+h, y_0+\theta_1' k) - f_y(x_0, y_0+\theta_1' k) \} \quad 0 < \theta_2' < 1$$

$$F = k h f_{yx}(x_0 + \theta_2' h, y_0 + \theta_1' k) \quad \text{--- (1.5.2.)}$$

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) = f_{yx}(x_0 + \theta_2' h, y_0 + \theta_1' k)$$

$h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ için sürekli fonksiyon olduklarından,

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \quad \text{olur.}$$

$(x_0, y_0) \in B$ keyfi bir nokta olduğundan, tüm B bölgesinde eşittir.

Bu teorem, karışık türevlerin ne zaman eşit olduğunu verir.

Birinci türevler sürekli ve mevcut iseler, iki karışık türevler eşittir.

Türev alma sırasının değiştirilebileceği hakkındaki (1.5.2) teoremi daha zayıf hipotezlerle kanıtlanak mümkündür.

Teorem 1.5.3. $z=f(x,y)$ fonksiyonu bir B bölgesinde tanımlanmış olsun.

$(x_0, y_0) \in B$ olmak üzere

i- (x_0, y_0) noktasının bir komşuluğunda f_x ve f_y parçalı türevleri var olsunlar.

ii- (x_0, y_0) noktasında f_{xy} sürekli olsun. Bu takdirde $f_{yx}(x_0, y_0)$ mevcuttur ve

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

dır.

İspat // $F = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$

$$f_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(x_0, y_0+k) - f_x(x_0, y_0)}{k}$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_y(x_0, y_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} \end{aligned} \right.$$

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x_0+h) - f_y(x_0, y_0)}{h}$$

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun daha yüksek mertebeden türevleri sürekliyse tümevarım metoduyla n . basamak parçalı türevi $(n+1)$ tane dir.

1.6. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Türevlenebilme

Kavramı

Bir değişkenli $y=f(x)$ fonksiyonu x noktasında türevlenebiliyorsa,

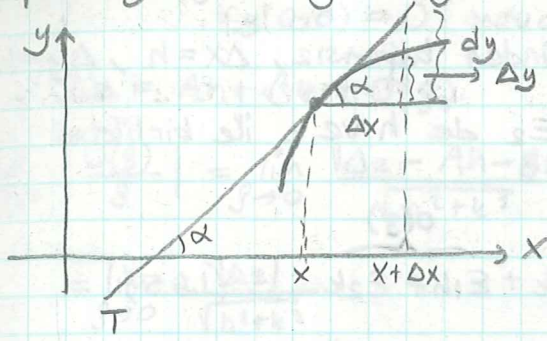
$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ olmak koşuluyla

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x) \dots (1.6.1)$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \dots (1.6.1)'$$

biçiminde yazılabilir.

diferansiyeli denildiğini biliyoruz.



$$\tan \alpha = \frac{dy}{\Delta x}$$

$$dy = \tan \alpha \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Özel olarak $y=x$ fonksiyonunun diferansiyeli alınırsa $dy=dx$ olur.

$$f'(x)=1 \quad dy = f'(x)\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x \Rightarrow dy = \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$$

(Değişkenin artma miktarıyla, değişkenin diferansiyeli aynı şeydir.

Fonksiyon için aynı şey söylenemez.)

$$dy = f'(x) dx$$

$$\Delta y = dy + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \quad \text{--- (1.6.2)}$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ olmak koşuluyla, bir A büyüklüğü yalnız x değişkenine bağlı fakat Δx den bağımsız olmak koşuluyla,

$$\Delta y = A\Delta x = \varepsilon(\Delta x)\Delta x \quad \text{--- (1.6.3)}$$

bağıntısının yazılabilmesi demek, $y=f(x)$ fonksiyonu x noktasında türevlenebilir demektir. Çünkü (1.6.3)'ü Δx 'e böler ve Δx sıfıra giderken limitini alırsak,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = A = f'(x)$$

$$\Delta y = dy + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$$

$$\Delta y = dy + 0 \cdot \Delta x \quad \text{--- (1.6.4)}$$

TANIM 1.6.1.

Eğer bir $y=f(x)$ fonksiyonu için (1.6.4) biçiminde bir yazılış tarzı mümkünse bu fonksiyon gözönüne alınan noktada türevlenebilirdir denir.

Şimdi ise $z=f(x,y)$ gibi iki değişkenli fonksiyon için türevlenebilme ile ilgili aşağıdaki tanımları verelim.

Eğer $z=f(x,y)$ fonksiyonu için tanım bölgesinin bir (x,y) noktasının konsülüğünde A ve B büyüklükleri birbirinden bağımsız, $\Delta x=h$, $\Delta y=k$ büyüklüklerine bağlı olmanak ve ϵ_1 ile ϵ_2 de h ve k ile birlikte sıfıra yaklaşmak koşuluyla

$$\Delta z = f(x+h, y+k) - f(x,y) = Ah + Bk + \underbrace{\epsilon_1 h + \epsilon_2 k}_{o(g)} \dots (1.6.5)$$

bağıntısı varsa $f(x,y)$ fonksiyonu (x,y) noktasında türevlenebilirdir denir.

$\sqrt{h^2+k^2} = g$ diyelim ve $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ yerine $g \rightarrow 0$

$$\frac{o(g)}{g} = \frac{\epsilon_1 h + \epsilon_2 k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\epsilon_1 h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{\epsilon_2 k}{\sqrt{h^2+k^2}} < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$\left| \frac{o(g)}{g} \right| = \frac{|\epsilon_1 h + \epsilon_2 k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{|\epsilon_1 h| + |\epsilon_2 k|}{\sqrt{h^2+k^2}} < |\epsilon_1| + |\epsilon_2|$$

$$\Delta z = f(x+h, y+k) - f(x,y) = Ah + Bk + o(g) \dots (1.6.6)$$

Bu ifadeyi $k=0$ için h' a bölüp limit alalım.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} = A = f_x(x,y) \quad \text{sonra, } k=0 \text{ için ;}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x,y)}{k} = B = f_y(x,y)$$

$$z=f(x,y) \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = A \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = B$$

$z=f(x,y)$ fonksiyonu (x,y) noktasında türevlenebilir bir fonksiyon ise bu fonksiyon, o noktada sürekli dir. Gerçekten

$$\Delta z = f(x+h, y+k) - f(x,y) = Ah + Bk + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k \quad (1.6.5) \text{ te}$$

h ve k =0 için $\Delta z=0$ dir. Fakat o noktada f_x ve f_y parçaları türevlerin varlığı, fonksiyonun o noktada türevlenebilir olmasını gerektirmez.

Örnek 1.6.1, $z = \sqrt{|xy|}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında f_x ve f_y olmasına karşın fonksiyon bu noktada türevlenemez.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|(0+h)0|} - 0}{h} = 0$$

$$f_x(0,0) = 0 \text{ mevcuttur.}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0(0+k)} - 0}{k} = 0$$

$f_y(0,0) = 0$ mevcuttur.

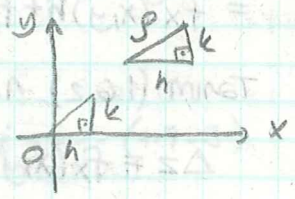
$$\Delta z = Ah + Bk + O(\rho)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{O(\rho)}{\rho} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\Delta z - Ah - Bk|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\Delta z|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$z = \sqrt{|xy|} \Rightarrow \Delta z = \sqrt{(0+h)(0+k)} = \sqrt{hk}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{hk}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}} = \sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}$$



Parçalı türevleri vardır fakat sürekli oldukları hakkında bir şey söyleyemez. $(0,0)$ da sürekli değildir.

Örnek 1.6.2. $z = x^2y + y^2$ fonksiyonunun tüm $\mathbb{R}^2$ de türevlenip türevlenemeyeceğini araştırınız.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm, } \Delta z &= f(x+h, y+k) - f(x, y) = \underbrace{(x+h)^2}_{A} \underbrace{(y+k)^2}_{B} - x^2y - y^2 \\ &= 2xyh + (x^2 + 2y)k + \underbrace{(2xk + y^2)h}_{E_1} + \underbrace{(h^2 + k^2)k}_{E_2} \\ &= Ah + Bk + \underbrace{E_1h + E_2k}_{O(\rho)} \end{aligned}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{O(\rho)}{\rho} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|(2xk + y^2)h + (h^2 + k^2)k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$< |2xk + y^2| + |h^2 + k^2| \rightarrow 0$$

Şimdi biraz daha geniş varsayımlar altında $z = f(x, y)$ fonksiyonunun ne zaman türevlenebilir olduğu hakkında aşağıdaki teoremi ifade edip kanıtlayalım.

Teorem 1.6.1. Eğer $z = f(x, y)$ fonksiyonu, tanım bölgesinin bir (x, y) noktasında, birinci basanaktan sürekli parçalı türevlere sahipse tanım (1.6.2) anlamında türevlenebilirdir. $(x+h, y+k), (x+h, y) \in S$

$$\begin{aligned} \text{İspat, } \Delta z &= f(x+h, y+k) - f(x, y) \quad ([y, y+k], [x, x+k] \text{ aralıklarında}) \\ &= f(x+h, y+k) - f(x+h, y) + f(x+h, y) - f(x, y) \end{aligned}$$

$$= k f_y(x+h, y+\theta_1 k) + h f_x(x+\theta_2 h, y) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \theta_1 < 1 \\ 0 < \theta_2 < 1 \end{array} \right.$$

$$= f_x(x, y)h + f_y(x, y)k + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k \quad \left\{ \begin{array}{l} f_x(x+\theta_2 h, y) = f_x(x, y) + \epsilon_1 \\ f_y(x+h, y+\theta_1 k) = f_y(x, y) + \epsilon_2 \end{array} \right.$$

Tanım (1.6.2) nin aynısı olur.

$$\Delta z = f_x(x, y)h + f_y(x, y)k + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k$$

elde edilir. O halde $z = f(x, y)$ fonksiyonu (x, y) noktasında türevlenebilir.

1.7. Tan Diferansiyel

Bir değişkenli $y = f(x)$ fonksiyonunda,

$$\Delta y = dy + O(\Delta x)$$

bağıntısı varsa, $y = f(x)$ fonksiyonu x noktasında türevlenebilir idi.

Burada ise $dy = f'(x)dx$ idi. Yine $z = f(x, y)$ fonksiyonu için, $g = \sqrt{h^2 + k^2}$ olmak üzere,

$$\Delta z = hf_x + kf_y + O(g)$$

biçiminde bir bağıntı varsa $z = f(x, y)$ fonksiyonu (x, y) noktasında türevlenebilir idi. Burada ise hf_x büyüklüğüne ve kf_y büyüklüğüne, $z = f(x, y)$ fonksiyonunun parçalı diferansiyeli denir.

TANIM 1.7.1.

$f_x h + f_y k$ toplamına $z = f(x, y)$ fonksiyonunun (x, y) noktasındaki tan diferansiyeli denir ve

$$dz = df(x, y) = f_x \frac{\Delta x}{h} + f_y \frac{\Delta y}{k} \quad \text{--- (1.7.1)}$$

biçiminde gösterilir.

Bir değişkenli $y = f(x)$ fonksiyonunda söylediğimiz gibi yani

$$\Delta x = dx \text{ idi.}$$

Burada $z = f(x, y)$ fonksiyonu yalnız x 'in fonksiyonu ise

$\Delta x = dx$ dir, ve $z = f(x, y)$ fonksiyonu yalnız y 'nin fonksiyonu ise $\Delta y = dy$ olacağından,

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy \quad \text{--- (1.7.2)}$$

Benzer şekilde $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -değişkenli fonksiyonun diferansiyeli de,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \text{--- (1.7.3)}$$

Burada da dz diferansiyeli, Δz farkı (artma miktarı) için bir yaklaşım değerinden başka birşey olmadığını hatırlatalım. Değişkenlerin artma miktarı ne kadar küçük ise, diferansiyel artma miktarı o kadar birbirine yakın olur.

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun tam diferansiyelinden söz edebilmek için fonksiyonun verilen noktada türevlenebilir olması gerekir.

$z=f(x,y)$ nin diferansiyeli, $dz = df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$ idi. Bunun diferansiyeli ise,

$$\begin{aligned} d(dz) &= d^2z = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} f(x,y) \end{aligned}$$

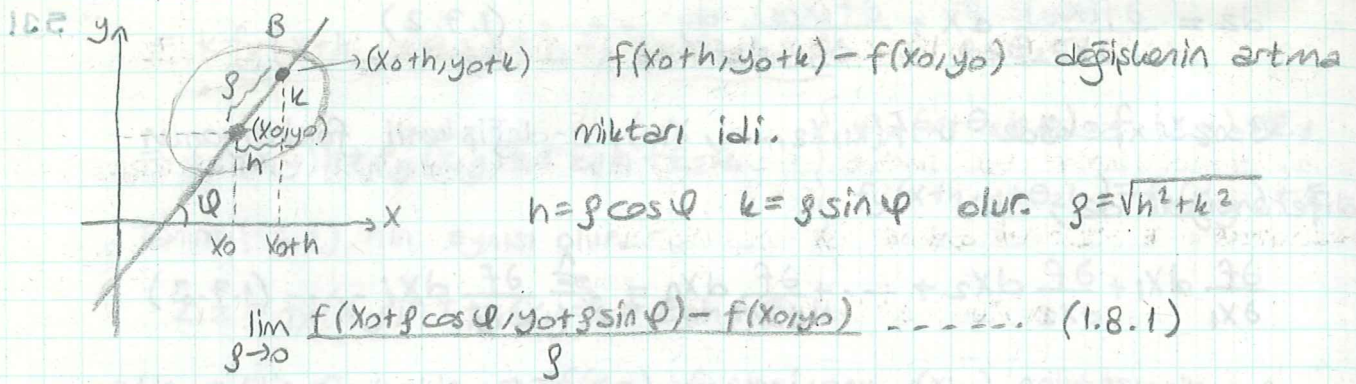
$\Rightarrow$ Tümevarım ile n . basamaktan türev,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(n)} f(x,y) = d^n f(x,y)$$

1.8. Herhangi Bir Yönde Türev

$z=f(x,y)$ fonksiyonu tanım bölgesindeki bir (x_0, y_0) noktasında türevlenebiliyorsa, bu fonksiyon aynı noktada herhangi bir yönde de türevlenebilir. Görelim.

Önce tanım bölgesindeki (x_0, y_0) noktasında türevlenebilen $z=f(x,y)$ fonksiyonunun ℓ yönündeki türevi ne demektir. Tanımlayalım.



nın bir limiti varsa, bu limite $z = f(x, y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasındaki φ yönündeki türevi denir ve

$$D^{(\varphi)}z \text{ veya } D^{(\varphi)}f(x_0, y_0)$$

ile gösterilir.

Bu tanıma $z = f(x, y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasında x değişkenine göre parçalı türevi ne anlama gelir, bakalım.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

(1.8.1) de k ' yerine sıfır koyarsak ($\varphi = 0$ olur.),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \quad x \text{ eksenini yönündeki türevidir}$$

Benzer şekilde (1.8.1) de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ koyarsak $h=0$, $g=k$ olur.

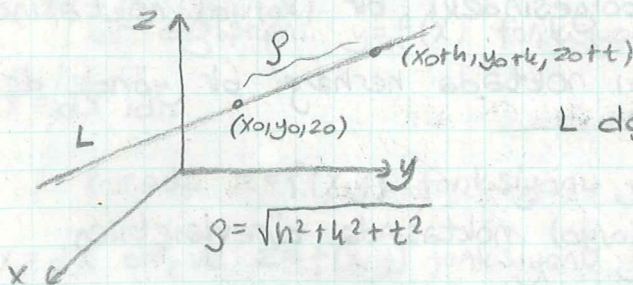
$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \quad y \text{ eksenini yönündeki türevidir.}$$

Benzer şekilde (x_0, y_0, z_0) noktasında türemlenebilen bir,

$U = f(x, y, z)$ fonksiyonunun L yönündeki türevini tanımlayalım.

(x_0, y_0, z_0) noktasından geçen bir L doğrusu gözönüne alalım.

L doğrusu üzerinde (x_0+h, y_0+k, z_0+t) bir nokta olsun.



L doğrusu, OX ekseniniyle α ,

Oy ekseniniyle β ,

Oz ekseniniyle γ

açısı yapsın. $h = g \cos \alpha$, $k = g \cos \beta$, $t = g \cos \gamma$ olur.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \cos \beta, z_0 + \rho \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho} \quad \dots (1.8.2)$$

nin bir limiti varsa, bu limite $U = f(x, y, z)$ fonksiyonunun (x_0, y_0, z_0) noktasındaki L türevi denir ve bu türev

$$D^{(L)} U \quad \text{ya da} \quad D^{(L)} f(x_0, y_0, z_0)$$

ile gösterilir.

Daha önce $z = f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında türevleniyorsa, $\Delta z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + O(\rho)$ şeklinde yazılıyor idi.

$$f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) - f(x_0, y_0) = \rho \cos \varphi f_x + \rho \sin \varphi f_y + O(\rho)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) - f(x_0, y_0)}{\rho} = D^{(\varphi)} f(x_0, y_0)$$

$$= f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi \quad \dots (1.8.3)$$

$U = f(x, y, z)$ fonksiyonunun (x_0, y_0, z_0) noktasındaki L yönündeki türevidir.

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + t) - f(x_0, y_0, z_0) = h f_x + k f_y + t f_z + O(\rho)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \cos \beta, z_0 + \rho \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho} = D^{(L)} f(x_0, y_0, z_0)$$

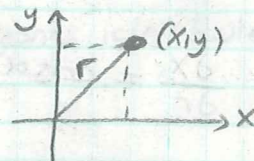
$$= f_x \cos \alpha + f_y \cos \beta + f_z \cos \gamma \quad \dots (1.8.4)$$

Üç değişkenli fonksiyonun L yönündeki türevidir.

(1.8.3) ise iki değişkenli fonksiyonun φ yönündeki türevidir.

- İki boyutta $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ yer vektörü yönündeki türev :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \quad \dots (1.8.5)$$



sembolik olarak bu şekilde gösterilir.

(Bu doğrultunun x eksenine yaptığı açı α dir.)

- Üç boyutta $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ yer vektörü yönündeki türev :

Bu doğrultu, x eksenine pozitif yönde α , y eksenine β , z eksenine γ açısı yapıyorsa, sembolik olarak

$$\frac{\partial}{\partial s} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{--- (1.8-6)}$$

biçiminde gösterilir.

Örnek 1.8.1. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ yer vektörünün φ yönündeki türevini bulunuz.

Çözüm // $z = f(x, y)$ fonksiyonunun φ yönündeki türevi ;

$$D^{(\varphi)} f(x, y) = f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi \quad \text{idi}$$

$$D^{(\varphi)} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{r} \cos \varphi + \frac{y}{r} \sin \varphi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{r} = \cos \alpha \\ \frac{y}{r} = \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$= \cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi$$

$$= \cos(\varphi - \alpha) //$$

Örnek 1.8.2. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ yer vektörünün kendi yönündeki türevini bulunuz.

Çözüm // $\frac{\partial}{\partial r} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}$ idi.

$$\frac{\partial r}{\partial r} = \cos \alpha \frac{\partial r}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial r}{\partial y} \quad r \text{ 'nin kendi yönündeki türevidir.}$$

$$1 = \cos \alpha \frac{x}{r} + \sin \alpha \frac{y}{r}$$

$$1 = \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha$$

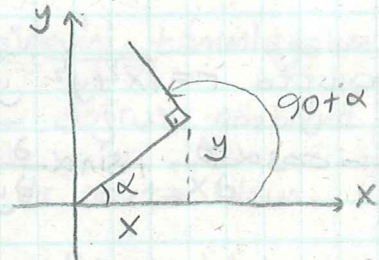
$$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \quad \text{olduğu doğrulanmış olur.}$$

$$D^{(\alpha)} r = 1 \quad \text{olur.} //$$

Örnek 1.8.3. $f(x, y) = x$ fonksiyonunun $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ yer vektörü yönündeki türevini bulunuz.

Çözüm // $\frac{\partial}{\partial r} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \alpha \quad D^{(\alpha)} x = \cos \alpha$$



Örnek 1.8.4. yukarıdaki fonksiyonun r yer vektörüne dik yöndeki türevini bulunuz.

Çözüm // $\frac{\partial}{\partial r} = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \frac{\partial}{\partial y}$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = -\sin \alpha \quad \text{dur.} \quad D^{(\frac{\pi}{2} + \alpha)} x = -\sin \alpha$$

1 - Aşağıdaki fonksiyonların limitlerinin mevcut olup olmadığını araştırınız.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \arctan \frac{y}{x}$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \begin{cases} 3xy, & (x,y) \neq (1,2) \text{ ise} \\ 0, & (x,y) = (1,2) \text{ ise} \end{cases}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + 2y)$ d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \begin{cases} x^2 + 2y, & (x,y) \neq (1,2) \text{ ise} \\ 0, & (x,y) = (1,2) \text{ ise} \end{cases}$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$

2 - $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y, & (x,y) \neq (1,2) \text{ ise} \\ 0, & (x,y) = (1,2) \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun $(1,2)$ noktasında sürekli olup olmadığını araştırınız.

3 - $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olup olmadığını araştırınız.

4 - a) $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_{yx}$ türevlerini bulunuz.

b) $z = \arctan \frac{y^2 - x^2}{1 - xy} \Rightarrow z_x, z_{yx}, z_y$

c) $z = \arctan \left(\frac{x}{y} \right) \Rightarrow z_x, z_y$?

d) $z = x^y \Rightarrow z_{yx} = ?$

e) $u = e^{xy^2} \Rightarrow u_{xyz} = ?$

5 - $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında f_x ve f_y parşalı türevlerinin mevcut olup olmadığını ve f_{xy} nin sürekli olup olmadığını araştırınız.

6 - n 'inci dereceden homojen $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ fonksiyonu için Euler tarafından bulunan,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = n f(x_1, x_2, \dots, x_k) \text{ eşitliği vardır.}$$

Aşağıdaki fonksiyonlar için Euler tarafından bulunan eşitliğin sağlanıp, sağlanmadığını araştırınız.

a) $z = x^2 y + x y^2$

b) $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \ln \left(\frac{x}{y} \right) = f(x,y,z)$

c) $u = \sin\left(\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$ d) $u = \frac{y}{x} e^{x/2}$ e) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

7- f ve g iki değişkenli ve iki kez türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere,
 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ fonksiyonu veriliyor.

$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ karışık türevini bulunuz.

8- $z = xe^{y/x} \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

9- $f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun (0,0) da f, f_x, f_y, f_{xy} fonksiyonlarının

mevcut ve sürekli olup olmadığını araştırınız.

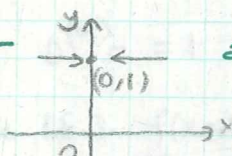
10- $z = \ln\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right) \Rightarrow (1+z_y^2) z_{xx} - 2z_x z_{xy} + (1+z_x^2) z_{yy} = ?$

11- $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 5y + 9$ fonksiyonunun tam diferansiyelini bulunuz.

12- $z = x^2 + 3xy$ fonksiyonunun (2,0) noktasında $\varphi = -45^\circ$ yönündeki türevini bulunuz.

13- $z = x^2y - 3y$ $x=4, y=3$ $\Delta x = -0,01$ $\Delta y = 0,02$ ise $\Delta z = ?$ $dz = ?$

Çözümler

1-  a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\lim_{y \rightarrow 1} \text{Arctan} \frac{y}{x} \right) = -\frac{\pi}{2}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\lim_{y \rightarrow 1} \text{Arctan} \frac{y}{x} \right) = \frac{\pi}{2}$ } eşit olmadığından limit yoktur.

b- $|x-1| < \delta$, $|y-2| < \delta$ olduğunda $|3xy-6| < \varepsilon$ $\delta = ?$

$- \delta < x-1 < \delta$ $- \delta < y-2 < \delta$
 $1-\delta < x < 1+\delta$ $2-\delta < y < 2+\delta$
 $3-3\delta < 3x < 3+3\delta$

$(3-3\delta)(2-\delta) < 3xy < (3+3\delta)(2+\delta)$

$6-9\delta+3\delta^2 < 3xy < 6+9\delta+3\delta^2$

$-9\delta+3\delta^2 < 3xy-6 < 9\delta+3\delta^2 < 9\delta+3\delta$

$-12\delta < 3xy-6 < 12\delta$

$|3xy-6| < 12\delta$ $\delta = \frac{\varepsilon}{12}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2+2y) = ?$ $|x-1| < \delta$ $|y-2| < \delta$ olduğunda

$|x^2+2y-5| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulalım.

$|x-1| < \delta \Rightarrow -\delta < x-1 < \delta$

$1-\delta < x < 1+\delta$

$1-2\delta+\delta^2 < x^2 < 1+2\delta+\delta^2$

$|y-2| < \delta \Rightarrow -\delta < y-2 < \delta$

$2-\delta < y < 2+\delta$

$4-2\delta < 2y < 4+2\delta$

$4-2\delta+1-2\delta+\delta^2 < x^2+2y < 4+2\delta+1+2\delta+\delta^2$

$5-4\delta+\delta^2 < x^2+2y < 5+4\delta+\delta^2$

$-4\delta+\delta^2 < x^2+2y-5 < 4\delta+\delta^2$, $\delta^2 < \delta$

$-5\delta < x^2+2y-5 < 5\delta$

$|x^2+2y-5| < 5\delta$

$\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ olmalıdır. // (limit 5 tir.)

2-)

$f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y, & (x,y) \neq (1,2) \text{ ise} \\ 0, & (x,y) = (1,2) \text{ ise} \end{cases}$

sürekli değildir. Limit değeri, $(1,2)$ deki değere eşit değildir.

1-e-) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1+m^2}$ limit yoktur.

f-) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2y^2}{(y^2)^2+y^4} = \frac{1}{2}$

limit yoktur.

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xm^2x^2}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xm^2}{1+m^4x^2} = \frac{0}{1} = 0$

$x=y^2$ eğrisi (parabolü) üzerinde limit yoktur.

3-

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$

$f(x,mx) = \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$ limit yoktur.

0 halde fonksiyon $(0,0)$ da sürekli değildir.

4-a) $z = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$

$z_x = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = x(x^2+y^2)^{-1}$

$z_{xx} = (x^2+y^2)^{-1} - 2x^2(x^2+y^2)^{-2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$z_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z_{xy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = z_{yx}$$

$$b) z = \text{Arctan}\left(\frac{y^2 - x^2}{1 - xy}\right)$$

$$z_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y^2 - x^2}{1 - xy}\right)^2} \cdot \frac{-2x(1 - xy) + y(y^2 - x^2)}{(1 - xy)^2}$$

$$= \frac{-2x + 2x^2y + y^3 - x^2y}{1 - 2xy + x^2y^2 + x^4 + y^4 - 2x^2y^2}$$

$$= \frac{y^3 + x^2y - 2x}{1 - 2xy - x^2y^2 + x^4 + y^4}$$

$$c) z = \text{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) \quad z_x = ? \quad z_y = ?$$

$$z_x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$z_y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

$$d) z = X^y \quad , \quad z_{yx} = ?$$

$$\ln z = y \ln X \quad \text{olur.}$$

$$\frac{z_y}{z} = \ln X \Rightarrow z_y = z \ln X = X^y \ln X$$

$$z_y = z \ln X \Rightarrow z_{yx} = z_x \ln X + \frac{z}{X}$$

$$\frac{z_x}{z} = y \frac{1}{X} \Rightarrow z_x = \frac{X^y y}{X} = X^{y-1} \cdot y$$

$$\Rightarrow z_{yx} = y X^{y-1} \ln X + X^{y-1} = X^{y-1} (y \ln X + 1)$$

$$e) u = e^{xyz} \quad u_{xyz} = ?$$

$$\ln u = xyz \Rightarrow \frac{u_x}{u} = yz \Rightarrow u_x = u yz$$

$$u_{xy} = u_y y \cdot z + u \cdot z = u x y z^2 + u z$$

$$u_{xyz} = u_z x y z^2 + 2 u x y z + u z \cdot z + u$$

$$= u x^2 y z^2 + 2 u x y z + u x y z + u$$

$$= e^{xyz} (x^2 y z^2 + 3 x y z + 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_y}{u} = xz \\ u_y = u xz \end{array} \right.$$

$$u_y = u xz$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_z}{u} = xy \\ u_z = u xy \end{array} \right.$$

6- $f(x,y)$ fonksiyonunda x yerine λx , y yerine de λy konulduğunda

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$ yazılabiliyorsa $f(x,y)$ fonksiyonu,

örnek // $f(x,y) = 3x^2y^5 - 5xy^3 + 7x^4y^3$

7. dereceden homojen bir fonksiyondur.

örnek // $f(x,y) = 2x^2y + 5x^2y^2 + 3xy^2$ homojen değildir.

5- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2+0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot k}{0+k^2}}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k^3} = 0$$

f_x, f_y parçalı türevleri vardır ve sıfırdır.

f_{xy} sınırsızdır.

6-a) $f(x,y) = x^2y + xy^2$ (3. dereceden homojen bir fonksiyondur.)

$$x f_x + y f_y = 3 f(x,y)$$

$$f_x = 2xy + y^2, \quad f_y = x^2 + 2xy$$

$$\Rightarrow x f_x + y f_y = 2x^2y + xy^2 + yx^2 + 2xy^2 = 3x^2y + 3xy^2 = 3(x^2y + xy^2) \\ = 3 f(x,y) //$$

b) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

$$f_x = x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{x} (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$f_y = y(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y} (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$f_z = z(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$x f_x + y f_y + z f_z = \frac{x^2 \ln\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 \ln\left(\frac{x}{y}\right) + z^2 \ln\left(\frac{x}{y}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + (x^2+y^2+z^2)^{1/2} - (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\ = 1(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

Homojenlik derecesi kendisidir. (1. derecedendir.)

c) $f(x,y,z) = \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$

$$\lambda^m = 1 \Rightarrow m = 0$$

$x f_x + y f_y + z f_z = 0$ olmalıdır.

$$7- z = x f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \frac{y}{x} = u \text{ dersek,}$$

$$z = x f(u) + g(u)$$

$$z_x = f(u) + x f_u \cdot u_x + g_u \cdot u_x$$

$$= f(u) - \frac{y}{x} f_u - \frac{y}{x^2} g_u$$

$$z_{xx} = -\frac{y}{x^2} f_u + \frac{y}{x^2} f_u + \frac{y^2}{x^3} f_{uu} + \frac{2y}{x^3} g_u + \frac{y^2}{x^4} g_{uu}$$

$$z_{xy} = \frac{1}{x} f_{uu} - \frac{1}{x} f_u - \frac{y}{x^2} f_{uu} - \frac{1}{x^2} g_u - \frac{y}{x^3} g_{uu}$$

$$z_y = f_u + \frac{1}{x} g_u \quad z_{yy} = \frac{1}{x} g_{uu}$$

$$x^2 z_{xx} = \frac{y^2}{x} f_{uu} + \frac{2y}{x} g_u + \frac{y^2}{x^2} g_{uu}$$

$$2xy z_{xy} = -\frac{2y^2}{x} f_{uu} - \frac{2y}{x} g_u - \frac{2y^2}{x^2} g_{uu}$$

$$+ y^2 z_{yy} = \frac{y^2}{x} f_{uu} + \frac{y^2}{x^2} g_{uu}$$

$$x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0 //$$

$$8- z = x e^{y/x}, \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x e^{y/x} - \frac{y}{x} x e^{y/x} + y e^{y/x} = x e^{y/x} = z //$$

$$9- f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ ise}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{array}{c} \rho \\ \swarrow \searrow \\ x \quad y \end{array}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \frac{\rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos 2\varphi$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \frac{\sin 4\varphi}{4} = 0 \text{ dir. Sürekli dir.}$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

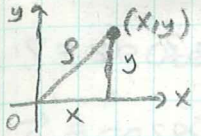
$$f_x(x,y) = y \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = x \frac{x^4 + 4x^2 y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{k^2}}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k^3} = 0$$

0 halde (0,0) noktasında f_x ve f_y türevleri vardır.



$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f_x(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin \varphi (\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) \rightarrow 0$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f_y(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos \varphi (\cos 2\varphi - \sin^2 2\varphi) \rightarrow 0$$

Süreklidirler. $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = (x^2 - y^2) \frac{x^4 + 10x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}$

$(x,y) \neq (0,0)$ için böyledir.

$(0,0)$ için f_{xy} nin mevcut ve sürekli olup olmadığına bakalım.

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k \cdot \frac{-k^4}{k^4}}{k} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \frac{h^4}{h^4}}{h} = 1 \text{ olur ve ;}$$

f_{xy} ve f_{yx} türevleri mevcuttur.

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} f_{xy}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} f_{yx}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \cos 2\varphi (1 + 2\sin^2 2\varphi) \end{aligned}$$

$\rho \rightarrow 0$ için sıfır olmaz. O halde $f_{xy}(x,y)$ fonksiyonu, $(0,0)$ başlangıç noktasında sürekli olmaz.

10- $z = \ln\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$

$$z_x = \frac{\frac{\cos y \sin x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos y}{\cos^2 x}} = \tan x \quad z_y = \frac{\frac{-\sin y}{\cos y}}{\frac{\cos y}{\cos^2 x}} = -\tan y$$

$$(1+z^2y)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy} = ?$$

$$(1+\tan^2 y)(1+\tan^2 x) - (1+\tan^2 x)(1+\tan^2 y) = 0 //$$

11- $dz = (2x - y + 3)dx + (4y - 5 - x)dy$

12- $z = x^2 + 3xy \quad (2,0) \quad \varphi = -45^\circ$

$$D^{(-45)} z = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} D^{(-45)} z &= (2x + 3y) \cos(-45) + 3x \sin(-45) \\ &= (2x + 3y) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{3x}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$D^{(-45)} z \Big|_{(2,0)} = \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} //$$

$$13 - z = x^2y - 3y \quad x=4, y=3 \quad \Delta x = -0,01, \Delta y = 0,02 \quad \Delta z = ? \quad dz = ?$$

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= (4 - 0,01)^2 (3 + 0,02) - 3(3 + 0,02) = 48 - 9$$

$$= 0,0018702 //$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad dx = \Delta x \quad dy = \Delta y$$

$$dz = (2xy) dx + (x^2 - 3) dy = 24(-0,01) + 13 \cdot 0,02 = 0,02 //$$

- II. BÖLÜM -

2.1. Gradient, Divergens ve Rotasyon

Bu kesimde vektör, paralel ve dik vektörler, birim vektör, bir vektörün normu, iki vektörün skaler (iş) ve vektörel (dip) çarpımı, ve bunların geometrik yorumlarını biliyor kabul edip, konuya gireceğiz.

TANIM 2.1.1.

Bir B bölgesinde tanımlı $f(x,y,z) = c$ kapalı tanımlı fonksiyonun f_x, f_y ve f_z parçalı türevlerini $\mathbb{R}^3$ de bileşenler olarak kabul eden

$$f_x \vec{e}_1 + f_y \vec{e}_2 + f_z \vec{e}_3$$

vektörüne f fonksiyonunun gradienti denir ve

$$\underline{\text{grad } f = f_x \vec{e}_1 + f_y \vec{e}_2 + f_z \vec{e}_3} \quad \text{--- (2.1.1.)}$$

yazılır. Denek ki 3 boyutlu uzayda her fonksiyona öyle bir vektör karşılık gelir ki, bu vektörün bileşenleri her koordinat sisteminde bu koordinata göre, parçalı türevleriyle ifade edilirler. Bu tanımlı biraz daha açalım.

$f(x,y,z)$ fonksiyonunun φ yönündeki türevini arımsayalım. φ yönü koordinat eksenleriyle pozitif yönde sırasıyla α, β, γ açıları yapıyorsa, $f(x,y,z)$ fonksiyonunun φ yönündeki türevi i

$$D^{(\varphi)} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \quad \text{--- (2.1.2)}$$

idi.

Öte yandan φ yönünde ve 1 birim uzunluğundaki,

$$\vec{e} = \cos \alpha \vec{e}_1 + \cos \beta \vec{e}_2 + \cos \gamma \vec{e}_3 \quad (\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1)$$

vektörünü gözönüne alalım. Buna göre

$$D^{(1)} f(x, y, z) = \langle \text{grad } f, \vec{e} \rangle \dots (2.1.3)$$

Gradient vektörün bileşenleri $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ olan ve

∇ (nabla) ile gösterilen vektör, diferansiyel operatör yardımıyla ifade edebiliriz. ∇ vektör diferansiyel operatör

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_3 \dots (2.1.4)$$

olarak tanımlanır. Böylece,

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f \dots (2.1.5)$$

dir. Yani,

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_3$$

olur.

TANIM 2.1.2.

Bir $\vec{V} = v_1(x, y, z) \vec{e}_1 + v_2(x, y, z) \vec{e}_2 + v_3(x, y, z) \vec{e}_3$ vektörünün

divergensi diye $\vec{\nabla}$ vektörü ile $\vec{V}$ vektörünün skaler çarpımına denir ve $\text{div}(\vec{V})$ ile gösterilir. Yani ;

$$\text{div}(\vec{V}) = \langle \vec{\nabla}, \vec{V} \rangle$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \dots (2.1.6)$$

dir. Denek ki bir V vektörüne skaler büyüklük olan $\text{div}(\vec{V})$ karşılık getirilmiş olmaktadır.

TANIM 2.1.3.

Bir $\vec{V} = v_1(x, y, z) \vec{e}_1 + v_2(x, y, z) \vec{e}_2 + v_3(x, y, z) \vec{e}_3$ vektörünün

rotasyonu diye $\vec{\nabla}$ vektörü ile $\vec{V}$ vektörünün vektörel (dis) çarpımına denir ve $\text{rot}(\vec{V})$ ile gösterilir. Yani,

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{e}_3 = 0$$

biçiminde bir vektördür.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \neq \vec{V} \cdot \vec{\nabla}$$

Örnek 2.1.1. $2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ yüzeyinin gradientini bulunuz.

Çözüm // $f(x, y, z) = 2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4z \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -10z + 4y$$

$$\text{grad } f = 4x \vec{e}_1 + 4z \vec{e}_2 + (4y - 10z) \vec{e}_3$$

Örnek 2.1.2. $\vec{V} = xz \vec{e}_1 - y^2 \vec{e}_2 + 2x^2y \vec{e}_3$ vektörünün divergensini ve

rotasyonunu bulunuz.

Çözüm // $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = z - 2y$

$$\text{div}(\vec{V}) = z - 2y \quad \text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix}$$

$$= 2x^2 \vec{e}_1 + (x - 4xy) \vec{e}_2$$

2.2. $z = f(x, y)$ Fonksiyonunun Türevlenebilir Olmasının Geometrik Anlamı . Teğet Düzlemi.

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesindeki bir x_0 noktasında türevlenebilir olması demek, $x_0 + h$ noktası da bu bölgede olması koşuluyla ve $h \rightarrow 0$ için $\varepsilon \rightarrow 0$ olmak üzere

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \underbrace{h\varepsilon(h)}_{o(h)}$$

yazılabilmesi demek olduğunu önceden biliyoruz. Yani $y = f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebiliyorsa bu fonksiyon x_0 noktasının bir komşuluğunda h 'ye göre doğrusal bir ifadeyle (fonksiyonla) yaklaşıp olarak gösterilebiliyor demektir.

Başka bir deyişle, eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki terim $f(x_0+h)$ değeri için bir yaklaşım ifadesini oluşturur.

$$(x_0+h) = \xi \text{ ve yaklaşım fonksiyonunu } \eta \text{ ile gösterirsek,} \\ (\xi = kxi, \eta = eta) \quad \eta = f(x_0) + (\xi - x_0)f'(x_0) \dots (2.2.1)$$

bulunur. (2.2.1) denklemi $y = f(x)$ eğrisine $\xi = x_0$, $\eta = f(x_0)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemidir.

$(y - y_0) = (x - x_0)f'(x_0)$, x_0 noktasında türevlenebilen bir fonksiyonun teğet denklemidir.

Yine benzer şekilde, (x_0, y_0) noktasında türevlenebilen $z = f(x, y)$ fonksiyonu için (x_0+h, y_0+k) noktası da, fonksiyonun tanım bölgesine ait bir nokta olmak üzere ;

$$(\xi = \sqrt{h^2 + k^2})$$

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + O(\sqrt{h^2 + k^2})$$

bağıntısının yazılabileceğini, yani fonksiyonun (x_0, y_0) noktasının bir komşuluğunda h ve k 'ya göre doğrusal bir fonksiyona yaklaşık olarak ifade edilebileceğini biliyoruz. Başka bir deyişle, eşitliğin sağ tarafındaki ilk üç terim $f(x_0+h, y_0+k)$ değeri için bir yaklaşım ifadesidir.

$(zeta)$
 $x_0+h = \xi$, $y_0+k = \eta$ koyar ve yaklaşım fonksiyonunu ξ ile gösterirsek bu yaklaşım fonksiyon :

$$\xi = z_0 + (\xi - x_0)f_x(x_0, y_0) + (\eta - y_0)f_y(x_0, y_0) \dots (2.2.2)$$

şeklini alır. Bu denklem ξ, η, ξ koordinatlarına göre bulunan ve $z = f(x, y)$ yüzeyine ait sabit bir (x_0, y_0, z_0) noktasındaki bir yüzeyin (x_0, y_0, z_0) noktasındaki teğet düzlemi denir.

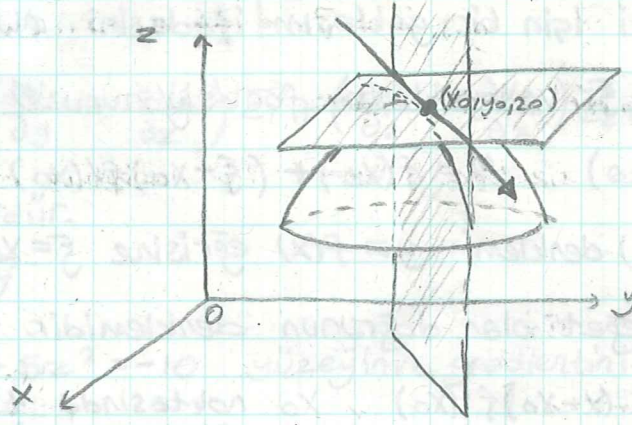
$$z - z_0 = (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0)$$

$z = f(x, y)$ yüzeyinin teğet denklemidir. ((x_0, y_0) noktasındaki)

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$F(x, y, z) = 0$ ^{kapalı} yüzeyinin (x_0, y_0, z_0) daki teğet denklemidir.

$z = f(x, y_0)$, $z = f(x_0, y)$; (x_0, y_0) noktasından geçen yüzey üzerinde birer eğri idi.



Sorular

- 1- $x^2 + y^2 = 4z$ düzleminin $(2, -4, 5)$ noktasındaki teğet denklemini bulunuz.
- 2- $f(x, y, z) = c$ yüzeyinin (x_0, y_0, z_0) noktasındaki $\vec{\nabla} f$ vektörünün yüzeyin (x_0, y_0, z_0) noktasındaki teğet düzlemine dik olduğunu gösteriniz.
- 3- $f(x, y, z) = c$ yüzeyinin herhangi (x_0, y_0, z_0) noktasındaki teğet düzleminin denklemini çıkarınız.
- 4- Yarıçapı 5 ve $(1, 1, 3)$ noktasında $x + y + z - 5 = 0$ düzlemine teğet olan kürenin denklemini bulunuz.

Çözümler

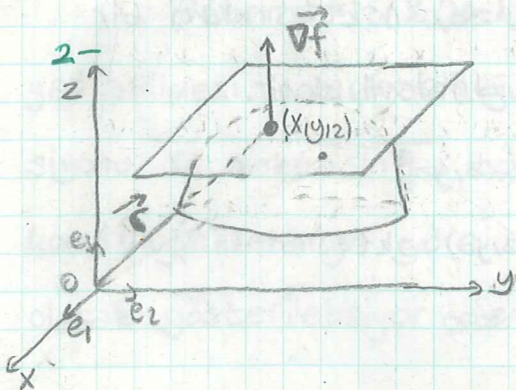
$$1- z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \quad z - 5 = (x - 2)f_x(2, -4) + (y + 4)f_y(2, -4)$$

$$f_x = \frac{1}{4} 2x = \frac{x}{2}$$

$$f_y = \frac{1}{4} 2y = \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow (z - 5) = (x - 2) \frac{x}{2} + (y + 4) \left(-\frac{1}{2}\right)$$

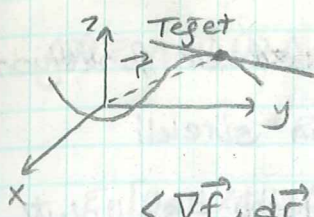
$$\Rightarrow (z - 5) = x - 2 - 2y - 8 \Rightarrow z = x - 2y - 5 //$$



$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$d\vec{r} = dx\vec{e}_1 + dy\vec{e}_2 + dz\vec{e}_3$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$



$d\vec{R}$, teğet doğrultusundadır.

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_3$$

$$\langle \vec{\nabla} f, d\vec{R} \rangle = 0 \text{ dir.}$$

$\vec{\nabla} f$, teğet düzleme diktir. ($\vec{\nabla} f$, yüzeye diktir de denilir.)

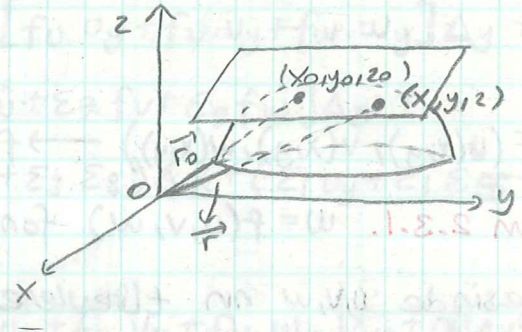
$$3 - (\vec{r} - \vec{r}_0) \perp \vec{\nabla} f$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

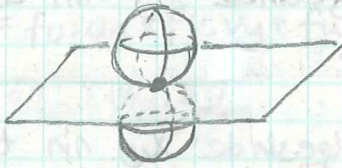
$$\vec{r}_0 = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_3$$

$$(x - x_0)f_x + (y - y_0)f_y + (z - z_0)f_z = 0$$



4 -



2.3. Bileşik Fonksiyonlar

$W = f(u, v, w)$ fonksiyonu u, v, w değişkenlerinin bir G bölgesinde tanımlanan sürekli bir fonksiyon olsun. Öte yandan,

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y) \dots (2.3.1)$$

funksiyonları da x, y değişkenlerinin B bölgesinde tanımlanan ve doğal



sürekli fonksiyon olsunlar. Bu takdirde

$$f(u(x, y), v(x, y), w(x, y)) = F(x, y) \dots (2.3.2)$$

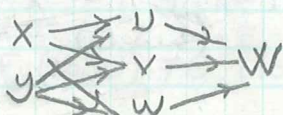
bileşik fonksiyonu da B bölgesinde

tanımlanmıştır. Çünkü (2.3.1) de (x, y) noktası B bölgesini taradığı

zaman (u, v, w) noktası da G bölgesini tarıyorsa ve $f(u, v, w)$

funksiyonu G bölgesinde tanımlanmış ise (2.3.2) deki bileşik

funksiyonu B bölgesinde tanımlandığı açıktır.



$$U_i = U \circ X_i$$

Ayrıca (2.3.2.)deki bileşik fonksiyon X, y 'nin sürekli fonksiyonudur.

$u_0 = u(x_0, y_0)$
 $v_0 = v(x_0, y_0)$
 $w_0 = w(x_0, y_0)$ } olsun. u, v, w fonksiyonları X, y 'nin sürekli fonksiyonları $W = f(u, v, w)$ fonksiyonu da u, v, w 'nin sürekli fonksiyonu olduğundan $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ için

$$\begin{aligned} u(x, y) &\rightarrow u(x_0, y_0) \\ v(x, y) &\rightarrow v(x_0, y_0) \\ w(x, y) &\rightarrow w(x_0, y_0) \end{aligned} \text{ yakınsayacağından}$$

$$f(u(x, y), v(x, y), w(x, y)) \rightarrow f(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0), w(x_0, y_0)) = F(x_0, y_0)$$

Teorem 2.3.1. $W = f(u, v, w)$ fonksiyonu üç boyutlu uzayın bir G bölgesinde u, v, w 'nin türevlenebilen bir fonksiyonu ve,

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y)$$

funksiyonları da 2-boyutlu uzayın bir B bölgesinde X, y 'nin türevlenebilen bir fonksiyonları olsunlar. Bu takdirde ;

i- $f(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$ fonksiyonu B bölgesinde X, y 'nin türevlenebilen fonksiyonudur.

ii- $W = f(u(x, y), v(x, y), w(x, y)) = F(x, y)$ 'nin parşeli türevleri,

$$\begin{aligned} F_x &= f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x + f_w \cdot w_x \\ F_y &= f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y + f_w \cdot w_y \end{aligned} \quad \text{--- (2.3.3)}$$

formüllerile verilir.

İspat // $W = f(u, v, w)$ fonksiyonu G bölgesinde u, v, w 'nin sürekli fonksiyonları olduğundan $\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0, \Delta w \rightarrow 0$ için, $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \varepsilon_3 \rightarrow 0$ ($\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2} \rightarrow 0$) olmak koşuluyla

$$\Delta W = f_u \cdot \Delta u + f_v \cdot \Delta v + f_w \cdot \Delta w + \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v + \varepsilon_3 \Delta w \quad \text{--- (2.3.4)}$$

Yine $u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y)$ fonksiyonları da B bölgesinde X, y 'nin türevlenebilen fonksiyonları olduklarından $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ için $\varepsilon_4 \rightarrow 0, \varepsilon_5 \rightarrow 0, \varepsilon_6 \rightarrow 0, \varepsilon_7 \rightarrow 0, \varepsilon_8 \rightarrow 0, \varepsilon_9 \rightarrow 0$ olmak koşuluyla,

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_x \Delta x + u_y \Delta y + \varepsilon_4 \Delta x + \varepsilon_5 \Delta y \\ \Delta v &= v_x \Delta x + v_y \Delta y + \varepsilon_6 \Delta x + \varepsilon_7 \Delta y \\ \Delta w &= w_x \Delta x + w_y \Delta y + \varepsilon_8 \Delta x + \varepsilon_9 \Delta y \end{aligned} \quad \text{--- (2.3.5)}$$

$$\Delta W = f_u [u_x \Delta x + u_y \Delta y + \varepsilon_4 \Delta x + \varepsilon_5 \Delta y] + f_v [v_x \Delta x + v_y \Delta y + \varepsilon_6 \Delta x + \varepsilon_7 \Delta y] + f_w [w_x \Delta x + w_y \Delta y + \varepsilon_8 \Delta x + \varepsilon_9 \Delta y] + \varepsilon_1 [u_x \Delta x + u_y \Delta y + \varepsilon_4 \Delta x + \varepsilon_5 \Delta y] + \varepsilon_2 [v_x \Delta x + v_y \Delta y + \varepsilon_6 \Delta x + \varepsilon_7 \Delta y] + \varepsilon_3 [w_x \Delta x + w_y \Delta y + \varepsilon_8 \Delta x + \varepsilon_9 \Delta y]$$

$$\Delta W = [f_u u_x + f_v v_x + f_w w_x] \Delta x + [f_u u_y + f_v v_y + f_w w_y] \Delta y + [\varepsilon_4 f_u + \varepsilon_6 f_v + \varepsilon_8 f_w] \Delta x + [\varepsilon_5 f_u + \varepsilon_7 f_v + \varepsilon_9 f_w] \Delta y + (\varepsilon_1 u_x + \varepsilon_4 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 v_x + \varepsilon_2 \varepsilon_6 + \varepsilon_3 w_x + \varepsilon_3 \varepsilon_8) \Delta x + (\varepsilon_1 u_y + \varepsilon_1 \varepsilon_5 + \varepsilon_2 \varepsilon_7 + \varepsilon_3 u_x + \varepsilon_4 \varepsilon_5) \Delta y$$

$$\Delta W = [f_u u_x + f_v v_x + f_w w_x] \Delta x + [f_u u_y + f_v v_y + f_w w_y] \Delta y + O(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

$$F_x = f_u u_x + f_v v_x + f_w w_x = W_x$$

$$F_y = f_u u_y + f_v v_y + f_w w_y = W_y$$

$$W_{xx} = ? \quad W_{yy} = ?$$

2.4. Kapalı Fonksiyonlar

$y=f(x)$ fonksiyonu açık tanımlı fonksiyon idi. $F(x,y)=0$ fonksiyonu ise kapalı tanımlı fonksiyon idi.

$z=f(x,y)$ de $z=0$ dersek $F(x,y)=0$ olur. Bu ise $z=0$ düzlemiyle x,y düzleminin arakesiti (iki boyutta) olan eğridir..

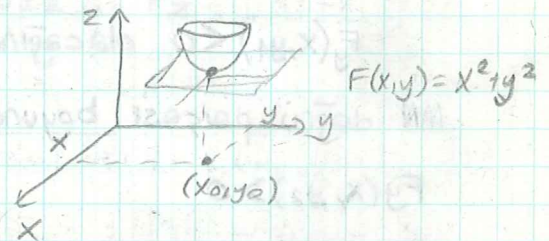
(x_0, y_0) isin, $z=f(x,y)$ düzleminin bu noktadaki teget denklemini;

$$z - z_0 = (x - x_0) F_x(x_0, y_0) + (y - y_0) F_y(x_0, y_0)$$

$$z = (x - x_0) F_x + (y - y_0) F_y$$

$z_0 = 0$ ise x,y düzlemi yüzeye

teğettir.



Teorem 2.4.1. (x_0, y_0) noktası bir B bölgesinin içinde olsun ve

$F(x,y)=0$ denklemini işin aşağıdaki hipotezler sağlansın.

1- $F(x_0, y_0) \neq 0$ olsun.

2- F_x ve F_y parçalı türevleri B 'de sürekli olsun.

3- $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ olsun.

Bu taktirde x_0 noktasını kapsayan öyle bir $[x_1, x_2]$ kapalı aralığı belirlenebilir ki, bu aralıkta $F(x, y) = 0$ denkleminin tek bir $y = f(x)$ fonksiyonu belirtilmiş olur ve bu fonksiyon için,

- i- $y_0 = f(x_0)$ dir.
- ii- $F(x, f(x)) = 0$ dir.
- iii- $y = f(x)$ fonksiyonu $[x_1, x_2]$ aralığında sürekli dir.
- iv- $y = f(x)$ " türevlenebilir dir ve bu türev.

$$-\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} \quad \text{--- (2.4.2)}$$

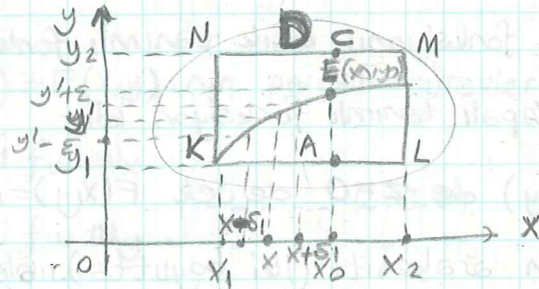
formülüyle belirtilir.

ispat // Bu noktadaki F_y pozitif kabul edildi. $F_y(x_0, y_0) > 0$

F_y , B bölgesinde sürekli idi. (Analiz III - 5.2.3. Teorem.)

$F_y(x_0, y_0) > 0$ ve F_y sürekli olduğundan F_y fonksiyonu (x_0, y_0) noktası komşuluğunda işaretini korur.

$F_y(x_0, y)$ fonksiyonunda x_0 sabit olduğundan, y 'ye bağlıdır.



E noktasında $F(x_0, y_0) = 0$

oldüğünden $F(x_0, y_1) < 0 < F(x_0, y_2)$ olacaktır.

$F_y(x, y_1) < 0$ olduğundan $x \in [x_1', x_2']$ alalım.

MN doğru parçası boyunca $F_y(x, y_2) > 0$, $x \in [x_1'', x_2'']$ için

$F_y(x, y_2) > 0$

$$[x_1'', x_2'] \cap [x_1', x_2''] = [x_1, x_2], \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

$F(x, y) = 0$, $F(x, f(x)) = 0$, $y = f(x)$ olur.

$\forall x' \in [x_1, x_2]$ için $|x - x'| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

$\forall x \in [x_1, x_2]$ ve $x+h \in [x_1, x_2]$ olmak üzere

$$F(x, y) = 0, \quad y = f(x) \quad F(x+h, y+h) = 0$$

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = hF_x + kF_y + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

(hipotezin ii. sıklından yazılabilir.)

β bölgesinde $F(x, y) \neq 0$ idi.

$$-kF_y = hF_x + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

$$k = \frac{-h}{F_y} F_x - \frac{\varepsilon_1 h}{F_y} - \frac{\varepsilon_2 k}{F_y}$$

$$\frac{k}{h} = \frac{-F_x}{F_y} - \frac{\varepsilon_1}{F_y} - \frac{\varepsilon_2 k}{F_y \cdot h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{F_x}{F_y} - \frac{\varepsilon_1}{F_y} - \frac{\varepsilon_2 k}{h \cdot F_y} \right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$$

Aynı teorem, $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ biçiminde ikiden daha çok değişkenli fonksiyonlar için de ispatlanır. Burada $F_z \neq 0$ kabul edilirse, benzer varsayımlar altında tek aralıklı ve sürekli bir

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

fonksiyonun varlığı gösterilebilir ve bu fonksiyonun türevi zincir kuralına göre,

$$F_{x_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{F_{x_2}}{F_z}, \dots$$

$$F_{x_n} + F_z \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{F_{x_n}}{F_z}$$

Örnek 2.4.1. // $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Örnek 2.4.2. // $F(x, y) = x^2 + 3xy^2 + y^2 - 2 = 0$ fonk. parçalı türevlerini bulunuz.

$$F_x = 2x + 3y^2, \quad F_y = 6xy + 2y$$

$$6xy + 2y \neq 0 \quad y(6x + 2) = 0 \quad y \neq 0 \quad x = -1/3$$

$$F_y \neq 0 \text{ ise } y^2(1 + 3x) = 2 - x^2$$

$$y = \mp \sqrt{\frac{2-2x}{1+3x}} \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{2x+3y^2}{6xy+2y}$$

y' de y ' yerine, değerini yazarsak aynı sonucu buluruz.

Örnek 2.4.2. // $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

$$F_z \neq 0 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x}{z} \rightarrow z_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y}{z} \quad z = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{z - xz_x}{z^2} = -\frac{z + \frac{x^2}{z}}{z^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-z - yz_y}{z^2} = \frac{-z + \frac{y^2}{z}}{z^2} = \frac{-z^2 + y^2}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-xz_y}{z^2} = \frac{-xy}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-yz_x}{z^2} = \frac{-xy}{z^3}$$

} Görüldüğü gibi karışık türev eşittir.

Örnek 2.4.3. $F(x,y,z) = xy^2z + xy - x + 2z = 0$ fonksiyonunun $(0,0,0)$

noktası komşuluğunda z 'ye göre sözülebilir olup olmadığını araştırınız.

Çözüm // $F_z(0,0,0) = 0 + 2 \neq 0$ o halde sözülebilir. Çünkü z 'ye göre türevinin 0 noktasındaki türevi 0'dan farklıdır.

$$z = \frac{x-xy}{xy^2+2} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} \quad ?$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(1-y)(xy^2+2) - y^2(x-xy)}{(xy^2+2)^2} = \frac{xy^2+2 - xy^3 - zy - y^2x + xy^3}{(xy^2+2)^2} = \frac{2(1-y)}{(xy^2+2)^2}$$

$$-\frac{F_x}{F_z} = -\frac{y^2z+y-1}{2xy^2+2} = -\frac{\frac{xy^2-xy^3}{xy^2+2} + y - 1}{(xy^2+2)}$$

$$= \frac{xy^2 - xy^3 + xy^3 + 2y - xy^2 - 2}{(xy^2+2)^2} = \frac{2(1-y)}{(xy^2+2)^2}$$

2.5. Diferansiyel Hesapta Değişken Değiştirilmesi

Diferansiyel hesapta bazen değişken değiştirmek bazı kolaylıklar sağlar. Bazen de bağımlı değişkenle, bağımsız değişkenin rollerini değiştirmekte bazı kolaylıklar sağlar.

Bir değişkenli $y=f(x)$ fonksiyonunun n . basamaktan türevi diferansiyelden yararlanarak hesaplanabilir.

Örneğin: $y=f(x)$ için, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$, ..., $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ dir.

Şimdi bu türevleri $x=h(t)$ değişimini yaparak hesap edelim.

I. Yol: $y=f(x)$, $x=h(t)$ $dx = h'(t) dt$ $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h'(t)}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{h'(t)} \quad \text{--- (2.5.1.)}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{h'(t)} \right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{h'(t)} \right] \frac{dt}{dx}$$

$$= \left[\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{h'(t)} \right]' \frac{1}{h'(t)} \quad \text{--- (2.5.2.)}$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) \frac{dt}{dx}$$

$$= \left[\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{h'(t)} \right) \frac{1}{h'(t)} \right]' \frac{1}{h'(t)} \quad \text{--- (2.5.3.)}$$

Böylece değişken değiştirme yoluyla hesap edilir.

II. Yol: $y=f(x)$ $x=h(t)$

$y' = \frac{dy}{dx}$ diferansiyeli $\Rightarrow dy = \frac{dy}{dt} \cdot dt$ şeklindedir.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt} \cdot dt}{h'(t) dt} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{h'(t)} \quad \text{// (2.5.1)'in aynısıdır.}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} (y') = \frac{d \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{h'(t)} \right)}{h'(t) dt} = \frac{\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{h'(t)} \right)' dt}{h'(t) dt} //$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{h'(t)} \right) \frac{1}{h'(t)} \right]' dt}{h'(t) dt} = \left(\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{h'(t)} \right)' \right) \frac{1}{h'(t)} //$$

Örnek 2.5.1. // $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + a^2 y = 0$ denklemini $x = \cos t$ değişimini

yaparak yeniden yazınız. $dx = -\sin t dt$ $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t}$

Çözüm,, $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + a^2y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = - \frac{dy}{dt} \frac{1}{\sin t}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \left(\frac{d}{dt} \left(- \frac{dy}{dt} \frac{1}{\sin t} \right) \right) \frac{-1}{\sin t} \\ &= \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{\sin^2 t} - \frac{dy}{dt} \frac{\cos t}{\sin^3 t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-\cos^2 t) \left[\frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{\sin^2 t} - \frac{dy}{dt} \frac{\cos t}{\sin^3 t} \right] + \cos t \left[\frac{dy}{dt} \frac{1}{\sin t} \right] + a^2y &= 0 \\ = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin t} \frac{dy}{dt} + \frac{\cos t}{\sin t} \frac{dy}{dt} + a^2y &= 0 \\ = \frac{d^2y}{dt^2} + a^2y &= 0 \end{aligned}$$

Alıştırırmalar

1- $\text{not}(\text{grad } f) = 0$,

2- $\text{div}(\text{not } \vec{U}) = 0$,

3- $\text{div}(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{V} \text{rad } \vec{U} - \vec{U} \text{rad } \vec{V}$ olduğunu gösteriniz.

4- $u = u(x_1, x_2, x_3)$, $v = v(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonları için ;

$$\text{div}(\vec{\nabla} u \wedge \vec{\nabla} v) = 0 \quad ?$$

5- $u = xy$ olduğuna göre $z = f(u)$ fonksiyonunun ikinci basamaktan tan diferansiyelini hesaplayınız.

6- $u = x+y$, $v = x-y$ olmak üzere $z = f(u, v)$ fonksiyonunun x ve y 'ye göre birinci ve ikinci basamaktan parçalı türevlerini bulunuz.

7- $z = y f(x^2 - y^2)$ fonksiyonu için $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = ?$

8- $f(x, y, z) = 0$ için $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$ çarpımını bulunuz.

9- $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ denklemini veriliyor.

a) $x=y$ için $\frac{dy}{dx} = ?$

b- $y' = 0$ yapan x değerini bulunuz.

10- g türevlenebilen fonksiyon, $x-az = g(y-bz)$ denklemiyle verilen

$$z = f(x,y) \text{ fonksiyonu için } a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

11- $z = z(x,y)$ fonksiyonu, $z = xg(\frac{z}{y})$ denklemiyle verilmiş olsun.

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

12- $x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + y = 0$ denklemini $x = e^t$ değişimini yaparak

yeniden yazınız.

13- $z = x^2 + y^2$ fonksiyonunun $(1,2,5)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

Çözümler

4- $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$ ise fonksiyonların x,y,z 'ye göre parseli türevleri var ve sürekli kabul edildiğinden karışık türevler eşittir.

$$\operatorname{div}(\vec{\nabla} u \wedge \vec{\nabla} v) = 0 ?$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_3 \quad \vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_3$$

$$\vec{\nabla} v = \frac{\partial v}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_3$$

$$\vec{\nabla} u \wedge \vec{\nabla} v = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \vec{e}_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \vec{e}_3$$

$$\operatorname{div}(\vec{\nabla} u \wedge \vec{\nabla} v) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u \wedge \vec{\nabla} v)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$- \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}$$

$$- \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} = 0 //$$

$$5 - u = x \cdot y \quad z = f(u) \quad d^2z = ?$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{1. basanaktan tam dif.}$$

$$\Rightarrow dz = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial u} y dx + \frac{\partial f}{\partial u} x dy$$

$$d^2z = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} y dx + \frac{\partial f}{\partial u} x dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} y dx + \frac{\partial f}{\partial u} x dy \right) dy$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} y^2 dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} xy dy dx + \frac{\partial f}{\partial u} dy dx \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} xy dx dy + \frac{\partial f}{\partial u} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} x^2 dy^2 \right)$$

$$d^2z = y^2 f_{uu} dx^2 + 2xy f_{uv} dx dy + 2f_u dx dy + x^2 f_{uu} dy^2$$

$$= f_{uv} (y dx + x dy)^2 + 2f_u dx dy //$$

6 - $u = x+y, v = x-y \quad z = f(u/v)$ için 1. ve 2. basanaktan parçallı türevlerini bulalım.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot (-1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot 1 \quad v_x = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \quad -1 = v_y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{vu} + z_{vu} - z_{uv} - z_{vv} = z_{uu} - z_{vv} //$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (z_u - z_v) = \frac{\partial}{\partial u} (z_u - z_v) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} (z_u - z_v) \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{uu} - z_{vu} - z_{uv} + z_{vv} = z_{uu} - 2z_{uv} + z_{vv} //$$

$$7 - z = y f(x^2 - y^2) \quad \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = ?$$

$$(x^2 - y^2) = u \Rightarrow z = y f(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2x$$

$$5 - u = x \cdot y \quad z = f(u) \quad d^2 z = ?$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{1. basanaktan tam dif.}$$

$$\Rightarrow dz = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial u} y dx + \frac{\partial f}{\partial u} x dy$$

$$d^2 z = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} y dx + \frac{\partial f}{\partial u} x dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} y dx + \frac{\partial f}{\partial u} x dy \right) dy$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} y^2 dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} x y dy dx + \frac{\partial f}{\partial u} dy dx \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} x y dx dy + \frac{\partial f}{\partial u} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} x^2 dy^2 \right)$$

$$d^2 z = y^2 f_{uu} dx^2 + 2xy f_{uv} dx dy + 2 f_u dx dy + x^2 f_{uu} dy^2$$

$$= f_{uv} (y dx + x dy)^2 + 2 f_u dx dy //$$

6 - $u = x+y, v = x-y \quad z = f(u/v)$ için 1. ve 2. basanaktan parçaları türevlerini bulalım.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot (-1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot 1 \quad v_x = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \quad -1 = v_y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{vu} + z_{vu} - z_{uv} - z_{vv} = z_{vu} - z_{vv} //$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (z_u - z_v) = \frac{\partial}{\partial u} (z_u - z_v) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} (z_u - z_v) \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{uv} - z_{vu} - z_{uv} + z_{vv} = z_{uv} - 2z_{uv} + z_{vv} //$$

$$7 - z = y f(x^2 - y^2) \quad \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = ?$$

$$(x^2 - y^2) = u \Rightarrow z = y f(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y \cdot f(u)) = 0 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot y = y f_u \cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot f(u)) = f(u) + y \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = f(u) - 2y^2 \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} = 2y f_u, \quad \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} f(u) - 2y f(u)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = 2y f_u + \frac{1}{y} f(u) - 2y f_u - \frac{z}{y^2}$$

$$\frac{z}{y^2} = \frac{y f(u)}{y^2} = \frac{1}{y} f(u)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = 0 //$$

$$8- F(x,y,z)=0 \quad \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = ?$$

$F_x \neq 0, F_y \neq 0, F_z \neq 0$ (kapalı fonksiyonlarda varlık teoremi.)

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right) \left(-\frac{F_z}{F_y}\right) \left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1 //$$

$$F_x \neq 0 \Rightarrow x = f(y,z)$$

$$F(x,y,z) = 0$$

$$F_y \neq 0 \Rightarrow y = g(x,z) \quad F_x \frac{\partial x}{\partial y} + F_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}$$

$$z = h(x,y) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ?$$

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \text{ olur.}$$

$$9- x^3 + y^3 - 3axy = 0 = F(x,y), \quad F_y \neq 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{(3x^2 - 3ay)}{(3y^2 - 3ax)} \quad y = x \text{ için,}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{(x^2 - ay)}{(x^2 - ax)} = -1 \quad a \neq 1 \quad (x^2 - ay) = 0 \quad y = \frac{x^2}{a}$$

$$x^3 + \frac{x^6}{a^3} - 3ax \frac{x^2}{a} = 0 \Rightarrow \frac{x^6}{a^3} = 2x^3 \Rightarrow x^6 = 2x^3 a^3$$

$$\Rightarrow x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = a\sqrt[3]{2} \quad \text{veya} \quad x^3(x^3 - 2a^3) = 0$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = x_5 = x_6 = a\sqrt[3]{2} //$$

10 - g türevlenebilen, $X - az = g(y - bz)$ denklemiyle verilen

$$z = f(x, y) \text{ fonksiyonu için } a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

$$F(x, y, z) = X - az - g(y - bz) = 0, F_z \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{-a + g' \cdot b}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-g'}{-a + g' \cdot b}$$

$$a \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-a + g' \cdot b}{-a + g' \cdot b} = 1 //$$

11 - $z = z(x, y)$ fonksiyonu $z = Xg\left(\frac{z}{y}\right)$ denklemiyle verilmiş olsun.

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = ? \quad f(x, y, z) = z - Xg\left(\frac{z}{y}\right) = 0, F_z \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-g}{1 - g' \cdot \frac{x}{y}} = -\frac{-g'}{1 - \frac{x}{y} g'} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial z}{\partial x}} \right\} z = X \cdot g$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{\frac{zx}{y^2} \cdot g'}{1 - \frac{x}{y} g'}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{Xg - \frac{zx}{y^2} g'}{1 - \frac{x}{y} g'} = 1 //$$

12 - $X^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ denklemini $X = e^t$ değişken dönüşümü

yaparak yeniden yazınız.

$$dX = e^t dt, \frac{dt}{dX} = \frac{1}{e^t} = e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dX} = \frac{dy}{dt} e^{-t} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dX} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} e^{-t} \right) \frac{dt}{dX}$$

$$X^2 = e^{-2t} \text{ den;}$$

$$= \left(\frac{d^2 y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dy}{dt} e^{-t} \right) e^{-t}$$

$$= \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t}$$

$$= X^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \Rightarrow X \frac{dy}{dX} = \frac{dy}{dt}$$

$$= X \frac{d^2 y}{dx^2} + X \frac{dy}{dx} + y = \frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0 //$$

denklemini bulalım.

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$z - z_0 = (x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0)$$

$$z - 5 = (x - 1) \cdot 2 + (y - 2) \cdot 4$$

$$z - 5 = 2x + 4y - 10 \Rightarrow 2x + 4y - z - 5 = 0$$

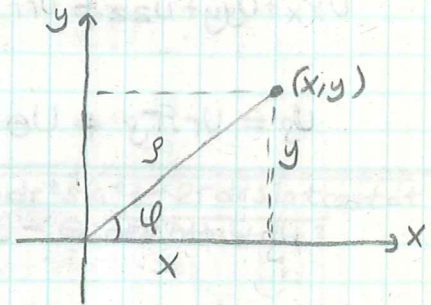
verilen nokta teğet düzlem üzerindedir.

2.6. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Değişken Değiştirilmesi

Örnek 2.6.1. $u = f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = F(\rho, \varphi)$

$$u_x = u_\rho \cdot \rho_x + u_\varphi \cdot \varphi_x = u_\rho \cdot \frac{x}{\rho} - u_\varphi \cdot \frac{y}{\rho^2}$$

$$u_y = u_\rho \cdot \rho_y + u_\varphi \cdot \varphi_y = u_\rho \cdot \frac{y}{\rho} + u_\varphi \cdot \frac{x}{\rho^2}$$



$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Laplace potansiyel ifadesi,

$$u_{xx} + u_{yy} = ?$$

$$\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\rho_y = \frac{y}{\rho} \quad \rho_x = \frac{x}{\rho} \quad \rho_y = \frac{y}{\rho}$$

$$u_{xx} = u_{\rho\rho} \frac{x^2}{\rho^2} - u_{\rho\varphi} \frac{xy}{\rho^2} + u_{\rho\rho} \frac{\rho - x\rho_x}{\rho^2} - u_{\varphi\rho} \frac{xy}{\rho^3} + u_{\varphi\varphi} \frac{y^2}{\rho^4} - u_{\varphi\varphi} \frac{2xy \cdot y}{\rho^4}$$

$$\Rightarrow u_{xx} = u_{\rho\rho} \frac{x^2}{\rho^2} - u_{\rho\varphi} \frac{2xy}{\rho^3} + \frac{\rho^2 - x^2}{\rho^3} + u_{\varphi\varphi} \frac{y^2}{\rho^4} - u_{\varphi\varphi} \frac{2xy}{\rho^4}$$

$$u_{yy} = u_{\rho\rho} \frac{y^2}{\rho^2} + u_{\rho\varphi} \frac{xy}{\rho^3} + u_{\rho\rho} \frac{\rho - y\rho_y}{\rho^2} + u_{\varphi\rho} \frac{xy}{\rho^3} + u_{\varphi\varphi} \frac{x^2}{\rho^4} + u_{\varphi\varphi} \frac{-2xy \cdot x}{\rho^4}$$

$$\Rightarrow u_{yy} = u_{\rho\rho} \frac{y^2}{\rho^2} + u_{\rho\varphi} \frac{2xy}{\rho^3} + u_{\rho\rho} \frac{\rho^2 - y^2}{\rho^3} + u_{\varphi\varphi} \frac{x^2}{\rho^4} - u_{\varphi\varphi} \frac{2xy}{\rho^4}$$

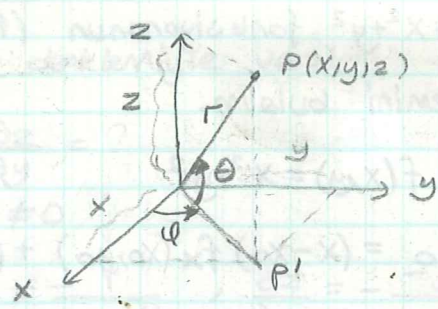
$$\underline{u_{xx} + u_{yy}} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}$$

$$U = f(x, y, z) \quad / \quad U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = ?$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi \\ y &= r \cos \theta \sin \varphi \\ z &= r \sin \theta \end{aligned}$$

$$r \cos \theta = \rho$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned}$$



$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} U_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} U_{\varphi\varphi} + U_{zz}$$

$$U_{\rho\rho} + U_{zz} = U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta}$$

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho} U_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} U_{\varphi\varphi}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

$$U_{\rho} = U_r \cdot r_{\rho} + U_{\theta} \cdot \theta_{\rho} = U_r \frac{\rho}{r} + U_{\theta} \frac{z}{r^2}$$

$$U_{\rho} = U_r \cdot \cos \theta + U_{\theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} &= U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} + \frac{1}{r \cos \theta} \left(U_r \cos \theta + U_{\theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) + \\ &+ \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} U_{\varphi\varphi} \end{aligned}$$

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = U_{rr} + \frac{2}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} - U_{\theta} \frac{1}{r^2} \tan \theta + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} U_{\varphi\varphi} //$$

Alistirmalar

1- $\frac{xy' - y}{\sqrt{1+y'^2}}$ ifadesini $x = r \cos t, y = r \sin t$ değisiimiyle yeniden yazınız.

2- $w = \frac{x+yy'}{xy'-y'}$ ifadesini $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ " " "

3- $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ denkleminde $u = x, v = x^2 + y^2$ deęisiimi yaparak

denklemi u, v , değiskenlerine göre yazınız.

4- $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$ denklemini $u = x, v = \frac{y}{x}$ deęisiimi yaparak

yeniden yazınız.

5- $(2x-1) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$ denklemini $x = \frac{t^2}{2}$ değisiimi yaparak, yeniden yazınız.

6- $(1-x^2)^2(a-y'') = by$ ifadesinde $u = u(u)$ olmak üzere

$x = \tanh u, y = \frac{2u}{\cosh u}$ değişimi yaparak yeniden yazınız.

Çözümler

$$1- y' = \frac{dy}{dx} = \frac{r \sin t + r \cos t dt}{r \cos t - r \sin t dt}$$

(Diferansiyel = türev $\times$ değişkenin artma miktarı)

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{r \sin t + r \cos t dt}{r \cos t - r \sin t dt} - r \sin t$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{r \sin t + r \cos t dt}{r \cos t - r \sin t dt} \right)^2}$$

$$= \frac{r^2 dt}{\sqrt{dr^2 \cos^2 t - 2r dr \sin t \cos t dt + r^2 \sin^2 t + dr^2 \sin^2 t + 2r dr \sin t \cos t dt + r^2 \cos^2 t dt^2}}$$

$$= \frac{r^2 dt}{\sqrt{dr^2 + r^2 dt^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2}}$$

$$2- y' = \frac{dy}{dx} = \frac{r \sin \varphi + r \cos \varphi d\varphi}{r \cos \varphi - r \sin \varphi d\varphi}$$

$$W = \frac{r \cos \varphi + \frac{r dr \sin^2 \varphi + r^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{dr \cos \varphi - r \sin \varphi d\varphi}}{r dr \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi} - r \sin \varphi$$

$$= \frac{r dr}{r^2 d\varphi} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi}$$

$$3- \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2y$$

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} y = 0 \quad y \neq 0 \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0 //$$

$$4- \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{1}{x}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z = \frac{\partial z}{\partial u} x - z = 0$$

$$5- dx = t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \left[\frac{dy}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \frac{1}{t} \right) \right] \frac{1}{t} = \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{t^2} - \frac{dy}{dt} \frac{1}{t^3}$$

$$(t^2-1) \left(\frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{t^2} - \frac{dy}{dt} \frac{1}{t^3} \right) + \frac{dy}{dt} \frac{1}{t} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{1}{t^3} + \frac{dy}{dt} \frac{1}{t} = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t^3} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$6- y' = \frac{dy}{dx} \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (y=y(x) \text{ ise.} \quad d(dx)=0$$

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y dx - d^2x dy}{dx^3}$$

$$dy = \frac{a \cosh u \cdot dv - a v \cdot \sinh u \cdot du}{\cosh^2 u} \quad dx = \frac{du}{\cosh^2 u} \quad du = \Delta u \quad d(du) = 0$$

$$d^2x = \frac{0 - 2 \cosh u \cdot \sinh u \cdot du}{\cosh^4 u}$$

$$d^2y = \frac{a \cosh^2 u (d^2v - v du^2) - 2a \cdot \sinh u (\cosh u \cdot dv - v \sinh u \cdot du)}{\cosh^3 u}$$

$$d^2y dx = \frac{a \cosh^2 u (d^2v - v du^2) - 2a \cdot \sinh u (\cosh u \cdot dv - v \sinh u \cdot du)}{\cosh^5 u} \cdot du$$

$$d^2x dy = \frac{-2a \cdot \cosh u \cdot \sinh u du^2 dv + 2a v \sinh^2 u \cdot du^3}{\cosh^5 u}$$

$$y'' = \frac{d^2y dx - d^2x dy}{dx^3} \quad \text{idi. // yerine yazarsak ;}$$

$$= \frac{\cosh^2 u (d^2v - v du^2) du}{\cosh^5 u} \cdot \frac{\cosh^6 u}{du^3} = a \cosh^3 u (d^2v - v du^2) \frac{1}{du^2}$$

$$(1-x^2)^2 (a-y'') = by$$

$$\frac{a}{\cosh^4 u} \left(1 - \frac{\cosh^3 u (d^2v - v du^2)}{du^2} \right) = \frac{a b v}{\cosh u}$$

$$\frac{1}{\cosh^3 u} = \frac{d^2v}{du^2} - v + b v$$

$$= \frac{d^2v}{du^2} + (b-1)v$$

F ve G fonksiyonları dik açılı uv -düzlemindeki bir B bölgesinde tanımlanmış olsun. (u,v) noktası B bölgesini taradığında, I.F.S. MILANI

$$x = F(u,v), y = G(u,v) \dots (2.7.1.)$$



denklemlerle tanımlanan (x,y) noktası da dik açılı xy -düzlemindeki bir C bölgesini tarasın. Bu durumda uv -düzlemindeki B bölgesi (2.7.1.) fonksiyon sistemi ya da dönüşümün yardımıyla xy -düzlemindeki C bölgesine dönüştürülmüştür. Ya da tasvir edilmiştir denir. Eğer bu dönüşüm 1-1 ve örten ise C 'deki nokta, B 'deki hangi noktadan elde edilir, biliniyor demektir. Yani (2.7.1) dönüşüm formülleri u ve v 'ye göre çözülebilir ve

$$u = f(x,y), v = g(x,y) \dots (2.7.2)$$

yazılabilir. Böylece (2.7.2) ile xy -düzlemindeki C bölgesi uv -düzlemindeki B bölgesine (esas bölgeye) dönüştürülmüş olur.

Bu dönüşümleri ikiden daha çok değişkenli fonksiyonlara da genişletmek mümkündür. Böyle dönüşümlerde temel sorun, (kısacası hatırı için iki değişkenli fonksiyonları gözönüne alacağız ve bu sonuçlar daha çok değişkenli fonksiyonlar için de doğru olacaktır.)

1- (2.7.1) biçiminde verilen fonksiyonların hangi koşullar altında (2.7.2) biçiminde ters dönüşümleri vardır.

2- Hangi koşullar altında (2.7.2) fonksiyon sisteminin parçalı türevleri vardır, I.F.S. MILANI

3- Bu parçalı türevler nasıl hesaplanır. (u_x, v_x, u_y, v_y) gibi sorulara cevap aramaktır.

Verilen bu sorulara cevap vermeden önce bunların incelemesinde yararlanacağımız bir kavramın tanımını verelim :

TANIM 2.7.1.

$$x_1 = F_1(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$x_2 = F_2(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$x_n = F_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \text{ gibi } n \text{ değişkenli } n \text{ fonksiyondan oluşan}$$

bir sisten verilmiş ve

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j}, i, j \in \mathbb{N}^+$$

var olsun. Bu taktirde ;

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

determinantına ; $F_1, F_2, \dots, F_n$ fonksiyonlarının $u_1, u_2, \dots, u_n$ değişkenlerine göre fonsiyonel determinanti ya da jakobyeni denir ve

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}$$

ile gösterilir.

örneğin : (2.7.1) fonksiyon sisteminin fonsiyonel determinanti,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = F_u \cdot G_v - G_u \cdot F_v$$

$$\begin{cases} x = F(u, v) \\ y = G(u, v) \end{cases}$$

dir. Şimdi (2.7.1) sistemini,

$$\left. \begin{array}{l} (F_i) \quad \varphi = (x, y, u, v) = x - F(u, v) = 0 \\ (F_{ii}) \quad \psi = (x, y, u, v) = y - G(u, v) = 0 \end{array} \right\} \text{----- (2.7.3)}$$

bişiminde yazalım ve aşağıdaki teoreni ifade edip kanıtlayalım.

Teorem 2.7.1. x, y, u, v - uzayının bir B bölgesi içindeki (x_0, y_0, u_0, v_0) noktasında $\varphi(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ ve $\psi(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ olsun ve φ ile ψ fonksiyonlarının bu dört değişkere göre parçalı türevi

β' 'de sürekli ve (x_0, y_0, u_0, v_0) noktasında;

$$D = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} = \varphi_u \cdot \psi_v - \psi_u \cdot \varphi_v \neq 0$$

olsun. Bu takdirde (x_0, y_0) noktasının öyle bir δ komşuluğu vardır ki burada $u = f(x, y)$ ve $v = g(x, y)$ fonksiyonları bir tek olarak vardır ve bunlar,

$$u_0 = f(x_0, y_0)$$

$$v_0 = g(x_0, y_0)$$

$$\varphi(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0$$

$$\psi(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0$$

koşulları sağlarlar. Bundan başka u ve v 'nin sürekli parçeli türevleri vardır ve bu türevler,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x + \varphi_u \cdot u_x + \varphi_v \cdot v_x &= 0 \\ \psi_x + \psi_u \cdot u_x + \psi_v \cdot v_x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{--- (2.7.3)'}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_y + \varphi_u \cdot u_y + \varphi_v \cdot v_y &= 0 \\ \psi_y + \psi_u \cdot u_y + \psi_v \cdot v_y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{--- (2.7.3)''}$$

denklemlerinden elde edilirler.

İspat, $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \neq 0$ olduğundan $\varphi_u, \psi_u, \varphi_v, \psi_v$ parçeli türevlerden en az biri sıfırdan farklıdır. Bu parçeli türevlerden

$\varphi_v \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda kapalı fonksiyonlarda

varlık teoremine göre $\varphi(x, y, u, v) = 0$ den $v = v(x, y, u)$ biçiminde sözülebilir.

$$\varphi(x, y, u, v(x, y, u)) = 0 \text{ --- (2.7.4)}$$

olur.

$$\varphi_u + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{\varphi_u}{\varphi_v} \text{ dir. (} u, y_0 \text{ göre türev olarak.)}$$

$$\varphi(x, y, u, v(x, y, u)) = \psi(x, y, u) = 0 \text{ olarak yazılabilir.}$$

$$\psi(x, y, u, v(x, y, u)) = 0$$

$$= \psi(x, y, u) \Rightarrow \psi_u = \psi_u + \psi_v \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\psi_u \varphi_v - \psi_v \varphi_u}{\varphi_v} = -\frac{D}{\varphi_v} \neq 0$$

$\psi(x,y,u)=0$ kapalı fonksiyonunda u diğerlerinin fonksiyonu şeklinde ($u=f(x,y)$) çözülebilir.

$v=v(x,y,u)$ nun fonksiyonu olarak çözülebilir olduğundan,

$v=v(x,y,f(x,y))=g(x,y)$ şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$u_0 = f(x_0, y_0)$$

$$v_0 = g(x_0, y_0)$$

bulunur. Buradan da ;

$$\psi(x,y,f(x,y),g(x,y))=0 \text{ ve } \psi(x,y,f(x,y),g(x,y))=0 \text{ bulunur.}$$

Şimdi ise parçalı türevlerin nasıl hesaplandığına bakalım.

$$\psi(x,y,u,v)=0, \quad \psi(x,y,u,v)=0$$

$$d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy + \psi_u du + \psi_v dv = 0 \quad (\text{diferansiyel olarak})$$

$$d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy + \psi_u du + \psi_v dv = 0.$$

$$\psi_u du + \psi_v dv = -\psi_x dx - \psi_y dy$$

$$\psi_u du + \psi_v dv = -\psi_x dx - \psi_y dy$$

$$du = \frac{\begin{vmatrix} -\psi_x dx - \psi_y dy & \psi_v \\ -\psi_x dx - \psi_y dy & \psi_u \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -\psi_x dx & \psi_v \\ -\psi_x dx & \psi_u \end{vmatrix}}{D} + \frac{\begin{vmatrix} -\psi_y dy & \psi_v \\ -\psi_y dy & \psi_u \end{vmatrix}}{D}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} -\psi_x & \psi_v \\ \psi_x & \psi_u \end{vmatrix}}{D} dx - \frac{\begin{vmatrix} \psi_y & \psi_v \\ \psi_y & \psi_u \end{vmatrix}}{D} dy$$

$$= -\frac{\psi_x \frac{\partial(\psi, \psi)}{\partial(x, v)}}{D} dx - \frac{\psi_y \frac{\partial(\psi, \psi)}{\partial(y, v)}}{D} dy$$

$$dv = \frac{\begin{vmatrix} \psi_u & -\psi_x dx - \psi_y dy \\ \psi_v & -\psi_x dx - \psi_y dy \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \psi_u & -\psi_x dx \\ \psi_v & -\psi_x dx \end{vmatrix}}{D} + \frac{\begin{vmatrix} \psi_u & -\psi_y dy \\ \psi_v & -\psi_y dy \end{vmatrix}}{D}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} \psi_u & \psi_x \\ \psi_v & \psi_x \end{vmatrix}}{D} dx - \frac{\begin{vmatrix} \psi_u & \psi_y \\ \psi_v & \psi_y \end{vmatrix}}{D} dy$$

$$dv = -\frac{\frac{\partial(\psi, \psi)}{\partial(u, x)}}{D} dx - \frac{\frac{\partial(\psi, \psi)}{\partial(u, y)}}{D} dy$$

$$U = U(x, y) \quad du = u_x dx + u_y dy, \quad v = v(x, y) \quad dv = v_x dx + v_y dy$$

$$u_x = - \frac{\frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(x, v)}}{D}, \quad v_x = - \frac{\frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(u, x)}}{D}, \quad u_y = - \frac{\frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(y, v)}}{D}, \quad v_y = - \frac{\frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(u, y)}}{D}$$

$$x = F(u, v) \quad y = G(u, v)$$

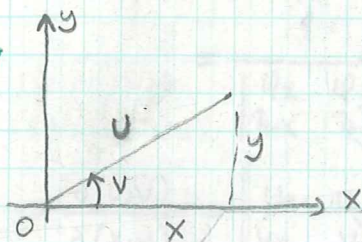
$$\varphi(x, y, u, v) = x - F(u, v) = 0$$

$$\eta(x, y, u, v) = y - G(u, v) = 0$$

$$D = \frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(u, v)} \neq 0 \Rightarrow u = f(x, y) \quad v = g(x, y)$$

$$\begin{aligned} u_x &= - \frac{\frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(x, v)}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_v \\ \eta_x & \eta_v \end{vmatrix}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & -F_v \\ 0 & -G_v \end{vmatrix}}{D} = \frac{G_v}{D} \\ v_x &= - \frac{\frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(u, x)}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{vmatrix}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} -F_u & 1 \\ -G_u & 0 \end{vmatrix}}{D} = - \frac{G_u}{D} \\ u_y &= - \frac{\frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(y, v)}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_v \\ \eta_y & \eta_v \end{vmatrix}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & -F_v \\ 1 & -G_v \end{vmatrix}}{D} = \frac{F_v}{D} \\ v_y &= - \frac{\frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(u, y)}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \eta_u & \eta_y \end{vmatrix}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} -F_u & 0 \\ -G_u & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{F_u}{D} \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

örnek //



$$x = u \cos v$$

$$y = u \sin v$$

$$\varphi(x, y, u, v) = x - u \cos v = 0$$

$$\eta(x, y, u, v) = y - u \sin v = 0$$

$$D = \frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos v & u \sin v \\ -\sin v & -u \cos v \end{vmatrix} = u \cos^2 v + u \sin^2 v = u$$

$$= u \neq 0$$

$$\begin{cases} u = f(x, y) \\ v = g(x, y) \end{cases} \quad u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad v = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{u} = \cos v$$

$u \neq 0$ olduğundan ters dönüşümü vardır.

$$u_x = - \frac{\frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(x, v)}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & u \sin v \\ 0 & -u \cos v \end{vmatrix}}{u} = \cos v$$

$$u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{u} = \sin v$$

$$u_y = - \frac{\frac{\partial(\varphi, \eta)}{\partial(y, v)}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_v \\ \eta_y & \eta_v \end{vmatrix}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & u \sin v \\ 1 & u \cos v \end{vmatrix}}{u} = \frac{u \sin v}{u} = \sin v$$

$$V_x = - \frac{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, x)}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_x \\ \psi_u & \psi_x \end{vmatrix}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} -\cos v & 1 \\ -\sin v & 0 \end{vmatrix}}{D} = - \frac{\sin v}{D} //$$

$$V_y = - \frac{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, y)}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_y \\ \psi_u & \psi_y \end{vmatrix}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} -\cos v & 0 \\ -\sin v & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\cos v}{D} ///$$

$$V_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{D^2} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{y}{D} = -\frac{1}{D} \cdot \sin v //$$

$$V_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{D} = \frac{1}{D} \cos v ///$$

Örnek // $u^2 - v = 3x + y$
 $u - 2v^2 = x - 2y$ olduğuna göre $u_x = ?$ $u_y = ?$ $v_x = ?$ $v_y = ?$

Çözüm // $\varphi(x, y, u, v) = 3x + y - u^2 + v = 0$

$$\psi(x, y, u, v) = x - 2y - u + 2v^2 = 0$$

$$D = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -2u & 1 \\ -1 & 4v \end{vmatrix} = -8uv + 1 \neq 0$$

$$u_x = - \frac{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, v)}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4v \end{vmatrix}}{1 - 8uv} = \frac{1 - 12v}{1 - 8uv}$$

$$v_x = - \frac{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, x)}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} -2u & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{1 - 8uv} = \frac{2u - 3}{1 - 8uv}$$

$$u_y = - \frac{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, v)}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4v \end{vmatrix}}{1 - 8uv} = \frac{4v + 2}{8uv - 1}$$

$$v_y = - \frac{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, y)}}{D} = - \frac{\begin{vmatrix} -2u & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{1 - 8uv} = \frac{1 + 4u}{8uv - 1}$$

Soru // $u = x^2 + y^2$, $v = x + y$ dönüşümü,

a- $y = x$ doğrusunu nereye dönüştürür?

b- $y = c$ doğrularını " " ?

2.8. Ters Fonksiyon Sisteminin Fonksiyonel Determinantı ile

Esas Fonksiyon Sisteminin Fonksiyonel Determinantı

Araındaki Bağntı

$$x = F(u, v) \quad y = G(u, v)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, u, v) &= 0 \\ \psi(x, y, u, v) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{--- (2.8.1)}$$

(2.8.1) sisteminde x ile y , u ile v 'nin fonksiyonu olarak düşünererek, (2.8.1) sisteminin u ve v 'ye göre parçalı türevlerini alırsak

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x \cdot x_u + \varphi_y \cdot y_u + \varphi_u &= 0 \\ \psi_x \cdot x_u + \psi_y \cdot y_u + \psi_u &= 0 \end{aligned} \right\} \text{--- (2.8.2)}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x \cdot x_v + \varphi_y \cdot y_v + \varphi_v &= 0 \\ \psi_x \cdot x_v + \psi_y \cdot y_v + \psi_v &= 0 \end{aligned} \right\} \text{--- (2.8.3)}$$

$$x_u = \frac{\begin{vmatrix} -\varphi_u & \varphi_y \\ -\psi_u & \psi_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}, \quad y_u = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_x & -\varphi_u \\ \psi_x & -\psi_u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}$$

$$x_v = \frac{\begin{vmatrix} -\varphi_v & \varphi_y \\ -\psi_v & \psi_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}, \quad y_v = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_x & -\varphi_v \\ \psi_x & -\psi_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}^2} \begin{vmatrix} -\varphi_u & \varphi_y & -\varphi_v & \varphi_y \\ -\psi_u & \psi_y & -\psi_v & \psi_y \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{1}{\varphi_x} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, v)} & -\frac{1}{\varphi_x} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, v)} \\ -\frac{1}{\psi_x} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, v)} & -\frac{1}{\psi_x} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, v)} \end{vmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} D = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2} \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_v & \varphi_y & \varphi_v \\ \psi_x & \psi_v & \psi_y & \psi_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{(\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x)^2} \begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x & \psi_v & -\varphi_v \\ \varphi_y & \psi_y & -\varphi_v & \varphi_u \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{(\varphi_u \varphi_v - \varphi_v \varphi_u)^2} \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_v & -\varphi_u \\ -\varphi_v & \varphi_u \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{(\varphi_x \varphi_y - \varphi_y \varphi_x)^2 (\varphi_u \varphi_v - \varphi_v \varphi_u)^2} \begin{vmatrix} \text{Determinantların} \\ \text{çarpımı} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \text{ olur.}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} \text{ dir. (Esas fonksiyonun türevi ile ters fonksiyonun türevi arasındaki benzer bir ilişki var. d'ler buradan gelmektedir.)}$$

2.9. Arka Arkaya Yapılan İki Dönüşümün

Birleştirilmesi

xy düzlemindeki bir B bölgesi, sürekli parçalı türevleri olan

$$\begin{cases} \xi = F(x,y) \\ \eta = G(x,y) \end{cases} \quad (2.9.1) \quad (\xi: \text{ksi}, \eta: \text{eto})$$

dönüşümü yardımıyla $\xi\eta$ -düzlemindeki bir D bölgesine bire-bir olarak dönüşsün. $\xi\eta$ -düzlemindeki bu D bölgesi de sürekli parçalı türevleri

$$\begin{cases} u = f(\xi, \eta) \\ v = g(\xi, \eta) \end{cases} \quad (2.9.2)$$

dönüşümü yardımıyla uv -düzlemindeki bir C bölgesine bire-bir ve örten olarak dönüşsün. Böylece xy -düzlemindeki B bölgesi, (2.9.1) ve (2.9.2) dönüşümleri yardımıyla uv -düzlemindeki C bölgesine dönüşür. Bu arka arkaya yapılan dönüşümü bir tek dönüşüm olarak düşünebiliriz. Şöyle ki; (2.9.1) deki ξ ve η değerlerini (2.9.2) de yerlerine koyarsak

$$\begin{cases} u = f(F(x,y), G(x,y)) \\ v = g(F(x,y), G(x,y)) \end{cases} \quad (2.9.3)$$

bişimini alır. Bu dönüşüm, xy -düzlemindeki B bölgesini, uv -düzlemindeki C bölgesine bire-bir olarak dönüştürür. Bu dönüşümün fonksiyonel determinanı,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y \quad (2.9.4)$$

dir.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} \cdot \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$$

Alistirmalar

1- $u = u(x)$, $v = v(x)$ olduğuna göre $u(v+x) = u-x$, $v(v+x) = u+x$

ise $u_x = ?$ $v_x = ?$

2- $u = u(x,v)$ $y = y(x,v)$ olduğuna göre $f(u,x,y) = 0$, $g(u,x,y) = 0$

denklemlerinden u_x 'i hesaplayınız.

3- $x = u+v+w$, $y = u^2+v^2+w^2$, $z = u^3+v^3+w^3$

$u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, $w = w(x,y,z)$ ise $u_x = ?$ $u_y = ?$ $u_z = ?$

4- $u = u(x)$ $v = v(x)$ $w = w(x)$ $u = f(v,w,x)$ $v = g(w,x,u)$ $w = h(x,u,v)$

olduğuna göre $u_x = ?$

5- $u = u(x,y,v)$, $z = z(x,y,v)$, $u = x^2 + y^2 + z^2$, $z = xyv$ olduğuna göre $u_x = ?$

6- $u = x^2 + y^2 + z^2$ $v = xy + zy + zx$, $w = x + y + z$ sistemi için,

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = ?$$

7- $0 < u < \infty$, $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < w < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $x = u \cos v \cos w$,

$y = u \sin v \cos w$, $z = u \sin w$ olduğuna göre $u_x, v_x, w_x, u_y, v_y, w_y$

u_z, v_z, w_z parçalı türevlerini bulunuz.

8- $T = x^3 - xy + y^3$, $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi \Rightarrow T_\rho = ?$ $T_\phi = ?$

9- Eğer $u = z \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ $x = 3r^2 + 2s$ $y = 4r - 2s^3$ $z = 2r^2 - 3s^2$ ise

$u_r = ?$ $u_s = ?$

10- Eğer $x = g \cos \phi$, $y = g \sin \phi$ ise $(v_x)^2 + (v_y)^2 = (v_g)^2 + \frac{1}{g^2} (v_\phi)^2$ olduğunu gösteriniz.

11- Eğer $u = u(r, s)$, $x = 2r - s$, $y = r + 2s \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = ?$

12- Eğer $F(u, v, w, x, y) = 0$, $G(u, v, w, x, y) = 0$, $H(u, v, w, x, y)$ ise

$$\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_x, \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_w, \frac{\partial w}{\partial v} \Big|_y \text{ bulunuz.}$$

Çözümler

1-

$$u_x(v+x) + u(v_x+1) = u_x - 1 \Rightarrow (v+x-1)u_x + uv_x = -1-u$$

$$v_x(v+x) + v(v_x+1) = u_x + 1 \Rightarrow -u_x + (v+x+v)v_x = 1-u$$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} -1-u & u \\ 1-v & 2v+x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v+x-1 & u \\ -1 & 2v+x \end{vmatrix}} \quad v_x = \frac{\begin{vmatrix} v+x-1 & -1-u \\ -1 & 1-v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v+x-1 & u \\ -1 & 2v+x \end{vmatrix}}$$

2- $f_v \cdot u_x + f_x + f_y \cdot y_x = 0$

$$g_x + g_y \cdot \widetilde{y_x} = 0$$

$$f_v \cdot u_x + f_x - f_y \frac{\widetilde{g_x}}{g_y} = 0 \Rightarrow u_x = \frac{f_y g_x - f_x g_y}{f_v \cdot g_y}$$

3- $1 = u_x + v_x + w_x$

$$0 = u_y + v_y + w_y$$

$$0 = 2u \cdot u_x + 2v \cdot v_x + 2w \cdot w_x$$

$$1 = 2u u_y + 2v v_y + 2w w_y$$

$$0 = 3u^2 u_x + 3v^2 v_x + 3w^2 w_x$$

$$0 = 3u^2 u_y + 3v^2 v_y + 3w^2 w_y$$

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2v & 2w \\ 0 & 3v^2 & 3w^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2v & 2v & 2w \\ 3v^2 & 3v^2 & 3w^2 \end{vmatrix}}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2v & 1 & 2w \\ 3v^2 & 0 & 3w^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2v & 2v & 2w \\ 3v^2 & 3v^2 & 3w^2 \end{vmatrix}}$$

$$0 = u_z + v_z + w_z$$

$$0 = 2u \cdot u_z + 2v \cdot v_z + 2w \cdot w_z$$

$$1 = 3u^2 u_z + 3v^2 v_z + 3w^2 w_z$$

$$u_z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2v & 2v & 0 \\ 3v^2 & 3v^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2v & 2v & 2w \\ 3v^2 & 3v^2 & 3w^2 \end{vmatrix}}$$

4- $u_x = f_v \cdot v_x + f_w \cdot w_x + f_x$

$$v_x = g_w w_x + g_x + g_u u_x$$

$$w_x = h_x + h_u \cdot u_x + h_v \cdot v_x$$

$$U_x - f_v \cdot V_x - f_w \cdot W_x = f_x$$

$$-g_v \cdot U_x + 1 \cdot V_x - g_w \cdot W_x = g_x$$

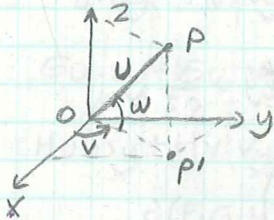
$$-h_v \cdot U_x - h_v \cdot V_x + 1 \cdot W_x = h_x$$

$$U_x = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f_v & -f_w \\ g_x & 1 & -g_w \\ h_x & -h_v & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -f_v & -f_w \\ -g_v & 1 & -g_w \\ -h_v & -h_v & 1 \end{vmatrix}}$$

$$5- U_x = 2x + 2z \cdot z_x = 2x + 2xyv_yv = 2x(1+y^2v^2)$$

$$6- \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ y+z & x+z & x+y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x+y+z) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 //$$

7-



$$F(x,y,z,u,v,w) = x - u \cos v \cos w = 0$$

$$G(x,y,z,u,v,w) = y - u \sin v \cos w = 0$$

$$H(x,y,z,u,v,w) = z - u \sin w = 0$$

$$x = x(u,v,w)$$

$$u = u(x,y,z)$$

$$y = y(u,v,w)$$

$$v = v(x,y,z)$$

$$z = z(u,v,w) \quad w = w(x,y,z) \quad \text{almost i\u0131in} \quad \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)} \neq 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$1 - u_x \cos v \cos w + u \sin v \cdot v_x \cos w + u \cos v \sin w \cdot w_x = 0 \quad (x' \text{ e g\u00f6re t\u00fcr\u00fcr})$$

$$0 - u_x \sin v \cos w - u \cos v \cdot v_x \cos w + u \sin v \sin w \cdot w_x = 0 //$$

$$0 - u_x \sin w + 0 \cdot v_x - u \cos w \cdot w_x = 0 //$$

$$8- T = x^3 - xy + y^3 \quad x = g \cos \phi \quad y = g \sin \phi \quad \frac{\partial T}{\partial g} = ? \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = ?$$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial g} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial g}$$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = (3x^2 - y) \cos \phi + (3y^2 - x) \sin \phi //$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = (3x^2 - y)(-g \sin \phi) + (3y^2 - x)(g \cos \phi) //$$

$$9- u = z \sin\left(\frac{y}{x}\right) \quad x = 3r^2 + 2s \quad y = 4r - 2s^3 \quad z = 2r^2 - 3s^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = ? \quad \frac{\partial u}{\partial s} = ? \quad u = u(x,y,z) \text{ b\u0131simindedir.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= -\frac{yz}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot 6r + \frac{z}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot 4 + \sin\left(\frac{y}{x}\right) 4r //$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{yz}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot 2 + \frac{z}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) (-6s^2) + \sin\left(\frac{y}{x}\right) (-6s) //$$

$$10 - x = \rho \cos \phi \quad y = \rho \sin \phi \Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = ?$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \frac{y}{x} = \tan \phi \Rightarrow \phi = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{x}{\rho} - \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{y}{\rho^2}$$

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{y}{\rho} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{x}{\rho^2}$$

$$\phi_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{\rho^2}$$

$$\phi_y = \frac{x}{\rho^2}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2 \frac{x^2}{\rho^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{xy}{\rho^3} + \left(\frac{\partial v}{\partial \phi}\right)^2 \frac{y^2}{\rho^4}\right)$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2 \frac{y^2}{\rho^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{xy}{\rho^3} + \left(\frac{\partial v}{\partial \phi}\right)^2 \frac{x^2}{\rho^4}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi}\right)^2$$

$$11 - u = u(r, s) \quad x = 2r - s \quad y = r + 2s \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = ?$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{2}{5} + \frac{\partial u}{\partial s} \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{1}{5} + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} 2x = 4r - 2s \\ y = r + 2s \end{cases}$$

$$r = \frac{1}{5}(2x + y)$$

$$s = \frac{1}{5}(2y - x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{5} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{5} \frac{\partial u}{\partial s}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{5} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{5} \frac{\partial u}{\partial s}\right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{2}{5} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{5} \frac{\partial u}{\partial s}\right) \frac{\partial s}{\partial y}$$

$$= \frac{2}{25} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} \frac{1}{25} + \frac{4}{25} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r} - \frac{2}{25} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{25} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) //$$

zincir kuralı

$$F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y + F_w \cdot w_y + F_y = 0 \quad (y'ye göre türev)$$

$$G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y + G_w \cdot w_y + G_y = 0$$

$$H_u \cdot u_y + H_v \cdot v_y + H_w \cdot w_y + H_y = 0$$

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, y, w)}}{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)}} =$$

$$F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y + F_x \cdot x_y + F_y = 0$$

$$G_u \cdot u_y + G_v \cdot v_y + G_x \cdot x_y + G_y = 0$$

$$H_u \cdot u_y + H_v \cdot v_y + H_x \cdot x_y + H_y = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)}}{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, x)}}$$

$$F_u + F_v \cdot v_u + F_w \cdot w_u + F_x \cdot x_u = 0$$

$$G_u + G_v \cdot v_u + G_w \cdot w_u + G_x \cdot x_u = 0$$

$$H_u + H_v \cdot v_u + H_w \cdot w_u + H_x \cdot x_u = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = w_u = - \frac{\begin{vmatrix} F_v & -F_w & F_x \\ G_v & -G_w & G_x \\ H_v & -H_w & H_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_v & F_w & F_x \\ G_v & G_w & G_x \\ H_v & H_w & H_x \end{vmatrix}} = - \frac{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(v, u, x)}}{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(v, w, x)}} //$$

- III. BÖLÜM -

3.1. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Ortalama Değer Teoremi

Yine, kısılmanın hatırı için burada da iki değişkenli fonksiyonları ele alacağız.

Teorem 3.1.1. $z = f(x, y)$ fonksiyonunun bir B bölgesinde tanımlanmış ve sürekli olsun. B 'nin iç kısmında sürekli f_x ve f_y parçalı türevleri bulunsun. h ve k 'yi öyle küçük seçelim ki, $(x_0, y_0) \in B$ ile

$(x_0 + h, y_0 + k) \in B$ noktasını birleştiren doğru parçasının tamamı

B 'de olsun. $0 < \theta < 1$ olmak üzere

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h f_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k f_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

dir.

İspat // $z = f(x, y)$ fonksiyonunda $t \in [0, 1]$ olmak üzere $x = x_0 + th$, $y = y_0 + tk$ değişimi yapalım.

$$f(x,y) = f(x_0+th, y_0+tk) = F(t) \quad \dots (3.1.1.)$$

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow F'(t) = hf_x(x_0+th, y_0+tk) + kf_y(x_0+th, y_0+tk) \quad \dots (3.1.2.)$$

$$F(1) = f(x_0+h, y_0+k) \quad ((3.1.1.) \text{ den yazarak})$$

$$F(0) = f(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow F(1) - F(0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

$$F'(t) = hf_x(x_0+th, y_0+tk) + kf_y(x_0+th, y_0+tk) \quad ((3.1.2.) \text{ den yazarak})$$

$$F(1) - F(0) = F'(t)$$

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'[a+(b-a)\theta]$$

Bu teorem, iki değişkenli

fonksiyonlarda ortalama değer teoremidir.

SONUÇ: Eğer $z=f(x,y)$ fonksiyonunun f_x ve f_y parçalı türevleri $\mathcal{B}$

bölgesinin her yerinde mevcut ve daima sıfır ise $f(x,y)$ fonksiyonu

sabittir. Çünkü; $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = hf_x(x_0+th, y_0+tk) + kf_y(x_0+th, y_0+tk)$

$(0 < \theta < 1)$ idi. $\forall h, k$ için $(x_0+h, y_0+k), (x_0, y_0) \in \mathcal{B}$ idi. $\mathcal{B}$ bölgesinde daima

$f_x = f_y = 0$ olduğundan h ve k ne dursa olsun,

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = 0 \text{ olur.}$$

Yani $\forall h, k$ için $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0)$ dır. (Fonksiyon artma miktarı

almıypr, fonksiyon sabit terimli demektir.) $f(x,y)$ sabittir.

3.2. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Taylor Formülü

$z=f(x,y)$ fonksiyonunda $x=x_0+th, y=y_0+tk$ değişimi yaparsak,

(Teorem 3.1.1. deki koşullar sağlandığı farzediliyor.)

$$f(x,y) = f(x_0+th, y_0+tk) = F(t) \text{ olur.}$$

$0 \leq t \leq 1$ aralığında $F(t)$ fonksiyonunun n 'inci basanaktan türevi

var ve sürekli, yine bu aralıkta $(n+1)$ 'ci basanaktan türevi de

var ise, bir değişkenli fonksiyonlardaki Taylor formülü gereğince;

$$F(t+\Delta t) = F(t) + \Delta t F'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} F''(t) + \dots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} F^{(n)}(t) + \frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(z)$$

$$(0 \leq \theta \leq 1), \quad z = (t + \Delta t \theta) \dots (3.2.1)$$

Burada t yerine 0, Δt yerine t koyarsak,

$$F(t) = F(0) + t F'(0) + \frac{t^2}{2!} F''(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(t \cdot \theta) \dots (3.2.2)$$

olur. $F(t) = F(x_0 + th, y_0 + tk)$ olduğundan

$$F(0) = F(x_0, y_0)$$

$$F'(t) = h f_x(x_0 + th, y_0 + tk) + k f_y(x_0 + th, y_0 + tk)$$

$$F'(0) = h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0)$$

$$F''(t) = h^2 f_{xx} + 2kh f_{xy} + k^2 f_{yy} = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^{(2)} f(x, y)$$

$$F^{(n)}(t) = (h f_x + k f_y)^{(n)} f(x, y)$$

$$\Rightarrow F''(0) = (h f_x + k f_y)^{(2)} f(x_0, y_0)$$

$$F^{(n)}(0) = (h f_x + k f_y)^{(n)} f(x_0, y_0)$$

$$F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(0)$$

$$= f(x, y) = h f_x + k f_y + \frac{1}{2} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^{(2)} f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^{(n)} f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^{(n+1)} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

$f(x, y) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ olduğundan, denklemde yazarsak;

$$\left\{ \begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + h f_x + k f_y + \frac{1}{2} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^{(2)} f(x_0, y_0) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^{(n)} f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^{(n+1)} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \end{aligned} \right\}$$

iki def. fonk. Taylor formülüdür.

Örnek 3.2.1 // $f(x, y) = x^2 y + 3y - 2$ fonksiyonunu $(1, -2)$ komşuluğunda Taylor formülüne aşınız. ($x-1$ ve $y+2$ nin artan kuvvetlerine göre aşınız.)

$$h = x - x_0$$

$$h = x - 1$$

$$f_x = 2xy$$

$$f_{xx} = 2y$$

$$f_{xxx} = 0$$

$$k = y - y_0$$

$$k = y + 2$$

$$f_{xy} = 2x = f_{yx}$$

$$f_{xxy} = 2$$

$$f_{xyy} = 0$$

$$f_{yyy} = 0$$

$$f(1, -2) = -10$$

$$f_x(1, -2) = -4$$

$$f_y(1, -2) = 4$$

$$f_{xx}(1, -2) = -4$$

$$f_{xy}(1, -2) = 2$$

$$f_{yy}(1,-2)=0 \quad f_{xxx}(1,-2)=0 \quad f_{xyy}(1,-2)=2 \quad f_{yyy}(1,-2)=0$$

$$f(x,y) = x^2y + 3y - 2$$

$$\begin{aligned} &= f(1,-2) + h f_x(1,-2) + k f_y(1,-2) + \frac{1}{2!} \{ h^2 f_{xx}(1,-2) + 2hk f_{xy}(1,-2) + k^2 f_{yy}(1,-2) \} \\ &+ \frac{1}{3!} \{ h^3 f_{xxx}(1,-2) + 3h^2k f_{xxy}(1,-2) + 3hk^2 f_{xyy}(1,-2) + k^3 f_{yyy}(1,-2) \} + R_3 \\ &= -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2) \end{aligned}$$

Örnek 3.2.2 // $f(x,y) = \sin(xy)$ fonksiyonunu $(1, \frac{\pi}{2})$ noktası komşuluğunda

3. dereceye kadar Taylor formülüne ağırlık.

$$h = x-1 \quad k = y - \frac{\pi}{2} \quad f_x = y \cos(xy) \quad f_{xx} = -y^2 \sin(xy)$$

$$f_y = x \cos(xy) \quad f_{yy} = -x^2 \sin(xy)$$

$$f_{xy} = -xy \sin(xy)$$

$$f(1, \frac{\pi}{2}) = 1 \quad f_x(1, \frac{\pi}{2}) = 0 \quad f_{xx}(1, \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi^2}{4} \quad f_y(1, \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$f_{yy}(1, \frac{\pi}{2}) = -1 \quad f_{xy}(1, \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin(xy) &= 1 + \frac{1}{1!} \{ 0 + 0 \} + \frac{1}{2!} \{ (x-1)^2 (-\frac{\pi^2}{4}) + 2\pi(x-1)(y-\frac{\pi}{2}) - (y-\frac{\pi}{2})^2 \} + R_2 \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{8} (x-1)^2 - \frac{\pi}{2} (x-1)(y-\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} (y-\frac{\pi}{2})^2 + R_2 \end{aligned}$$

Örnek 3.2.3 // $f(x,y) = ye^{x-y}$ fonksiyonunu $(0,0)$ noktası komşuluğunda

4. dereceye kadar (3. dereceden) Taylor formülüne ağırlık.

$$f_x = ye^{x-y} \quad f_{xx} = ye^{x-y} \quad f_{xxx} = ye^{x-y}$$

$$f_y = e^{x-y} - ye^{x-y}$$

$$f_{xy} = e^{x-y} - ye^{x-y}$$

$$f_{yy} = -e^{x-y} - e^{x-y} + ye^{x-y}$$

$$f_{xyy} = -2e^{x-y} + ye^{x-y}$$

$$f_{yyy} = 3e^{x-y} - ye^{x-y}$$

$$f_{xxy} = e^{x-y} - ye^{x-y}$$

$$ye^{x-y} = 0 + \frac{1}{1!} \{ x \cdot 0 + y \} + \frac{1}{2!} \{ x^2 \cdot 0 + 2xy + y^2 (-2) \} + \frac{1}{3!} \{ x^3 \cdot 0 + 3x^2y + 3xy^2 (-2) + 3y^3 \} + R_3$$

$$= y + \frac{1}{2} 2xy - \frac{2y^2}{2} + \frac{1}{6} 3x^2y - \frac{6xy^2}{6} + \frac{3y^3}{6} + R_3$$

$$ye^{x-y} = y + xy - y^2 + \frac{1}{2} x^2y - xy^2 + \frac{y^3}{2} + R_3 //$$

Ödev // $f(x,y) = 2x^4 + 3xy^2 - y^3$, $(2,3)$

$g(x,y) = \text{Arctan}(\frac{y}{x})$, $(1,\sqrt{3})$

3. dereceye kadar Töylor formülüne aqın12.

3.3. Fonksiyonların Bağımlılığı

xy -düzleminin bir B bölgesinde birinci basanaktan sürekli parçalı türevleri olan bir ;

$$u = f(x,y) , v = g(x,y) \quad \text{--- (3.3.1)}$$

dönüşümünün fonksiyonel determinanti bu B bölgesinin bir (x_0,y_0) noktasında ya da bu noktanın δ komşuluğundaki her yerinde sıfır olmasını inceleyelim:

Ters dönüşümünün (ters fonksiyonunun) varlığını kanıtlarken bu fonksiyonel determinantin (x_0,y_0) noktasında sıfırdan farklı durumunu incelemiştik.

Şimdi ise fonksiyonel determinantin (x_0,y_0) noktasında sıfır olması durumunda denklemlerin bu nokta komşuluğunda x ve y 'ye göre çözülüp çözülmemeyeceği konusunda (ters fonksiyonun olup, olmayacağını), incelemeye çalışalım.) kesin birşey söyleyemez. Ancak ters fonksiyonlar olsa bile bunların bu noktada türevlenebileceği söylenebilir.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial f(x,y)} = 1 \text{ olduğu biliniyor. O halde sıfır ise ilişki olur.}$$

(3.3.1) sisteminde ait fonksiyonel determinantin , fonksiyonların tanım kümesine ait bir (x_0,y_0) noktasının δ komşuluğunda özdeş olarak sıfır olduğunu varsayalım.

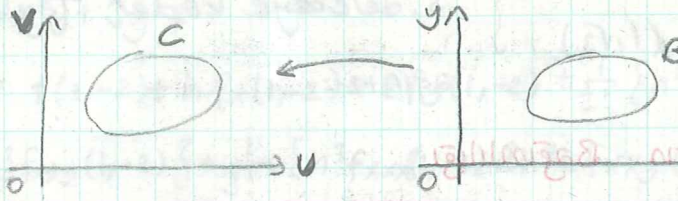
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = F_x G_y - G_x F_y = 0 \text{ ise}$$

i- $F_x = F_y = G_x = G_y = 0$ olur.

ii- F ve G nin parçalı türevleri sıfır olur.

$$F_x = F_y = 0 \text{ veya } G_x = G_y = 0$$

3- Fark olduğundan $F_x G_y - F_y G_x = 0$ olabilir.



i. durumda, $u = \text{sabit}$
 $+ v = \text{sabit}$

Dönüşüm 1:1 değildir.

$u+v = \text{sabit} \Rightarrow u$ ile v birbirine bağlıdır.

ii. durumda, $u = \text{sabit}$
 $v = \text{değişken}$

Dönüşüm 1:1 değildir. $v = G(x, y)$

u ile v birbirine bağlıdır.

iii. durumda, F_x ve F_y parşeli türevlerinden en az biri sıfırdan

farklı ($F_y \neq 0$) olsun. $u = F(x, y) \Rightarrow u - F(x, y) = 0 \quad y = g(x, u)$

$v = G(x, y) \Rightarrow v = G(x, g(x, u)) = h(x, u)$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = G_x + G_y \cdot y_x$$

$$0 - F_x + F_y \cdot y_x = 0 \Rightarrow y_x = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = G_x - G_y \cdot \frac{F_x}{F_y} = \frac{-F_y G_x + G_y F_x}{F_y}$$

$F_y G_x - G_y F_x = 0$ olduğundan $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ olur.

O halde v , x 'e bağlı değildir.

$v = h(u)$ olur. Yine u ile v birbirine bağlıdır.

Örnek 3.3.1. $u = \arctan x - \arctan y$, $v = \frac{x-y}{1+xy}$ fonksiyonlarının

birbirlerine bağlı olup olmadığını araştırınız. Bağlı ise bu fonksiyonel bağıntıyı bulunuz.

Çözüm,, $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+x^2} & -\frac{1}{1+y^2} \\ \frac{1+y^2}{(1+xy)^2} & -\frac{1+x^2}{(1+xy)^2} \end{vmatrix} = 0$

$$v_x = \frac{1+xy - xy + y^2}{(1+xy)^2}$$

$$v_y = \frac{-1-xy - x^2 + xy}{(1+xy)^2}$$

u ile v fonksiyonu birbirine bağlıdır.

$$\arctan x = u + \arctan y \Rightarrow x = \tan(u + \arctan y)$$

$$x = \frac{\tan u + y}{1 - y \tan u}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$y = \frac{\frac{\tan u + y}{1 - y \tan u} - y}{1 + \frac{\tan u + y}{1 - y \tan u} \cdot y} = \frac{\tan u + y - y + y^2 \tan u}{1 - y \tan u + y \tan u + y^2}$$

$$y = \frac{\tan u (1 + y^2)}{y^2 + 1} = \tan u \Rightarrow u = \arctan y //$$

Aşağıdaki u ile v fonksiyonlarının birbirine bağlı olup olmadıklarını araştırınız. Eğer bağlı ise bu fonksiyonel bağıntıyı bulunuz.

1- $u = \ln(x+y) \quad v = x^2 + y^2 + 2xy + 1$

2- $u = \frac{x+y}{x} \quad v = \frac{x+y}{y}$

3- $u = x+y \quad v = x^2 + y^2$

4- $u = \frac{1-xy}{x+y} \quad v = \frac{(x+y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)}$

Çözüm 1 // $v = (x+y)^2 + 1 \quad v = e^{2u} + 1$

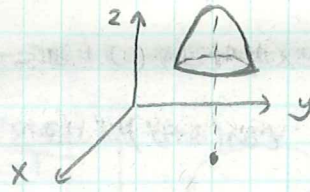
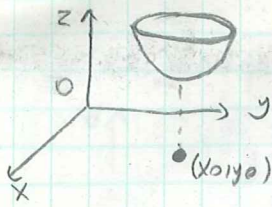
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x+y} & \frac{1}{x+y} \\ 2x+2y & 2y+2x \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} x+y = e^u \\ v = e^{2u} + 1 \end{matrix}$$

u ile v birbirine bağlıdır.

3.4. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Ekstremum

$z = f(x,y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasının δ komşuluğunda sürekli olsun. Bir değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi eğer bu noktadaki fonksiyon değeri bu komşuluktaki fonksiyonun diğer bütün değerinden küçük değilse yani $\forall (x_0+h, y_0+k) \in K_\delta$ için $f(x_0, y_0) \geq f(x_0+h, y_0+k)$ ise $f(x,y)$ fonksiyonunun bu komşuluğa göre bir maksimumu vardır.

Benzer şekilde, $f(x,y)$ fonksiyonunun büyük değilse yani $\forall (x_0+h, y_0+k) \in K_\delta$ için $f(x_0, y_0) \leq f(x_0+h, y_0+k)$ ise $f(x,y)$ fonksiyonunun bu komşuluğa göre bir minimumu vardır.

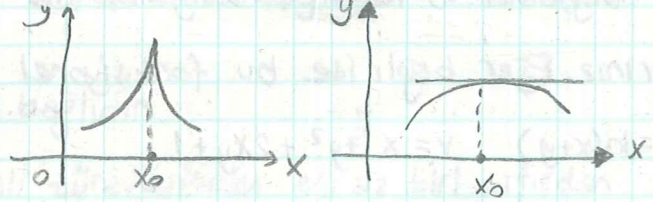


3.5. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Ekstreminin Olması İçin

Gerekli Koşullar

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasında bir ekstremumunun var olduğunu kabul edelim. Yalnız x 'e bağlı olan $f(x, y_0)$ fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$f_x(x, y_0) = 0$$



Bir değişkenli fonksiyonlarda ekstremum, ya fonksiyonun sıfır olduğu (türevinin ya da türevlenemediği yerde ortaya çıkar.

$f(x_0, y)$ fonksiyonu için (y 'ye bağlı olan) $f_y(x_0, y) = 0$ veya $f(x_0, y)$ nin türevlenemediği yerde ekstremum ortaya çıkar.

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun ekstremumunu,

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ veya } f_y(x_0, y_0) = 0 \quad \dots (3.5.1)$$

olan noktalarda ya da türevlerin mevcut olmadığı yerlerde ortaya çıkar.

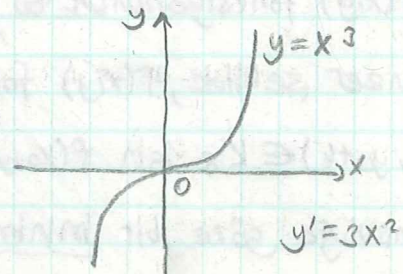
$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{f_x(x_0, y_0)}{0} + (y - y_0) \frac{f_y(x_0, y_0)}{0}$$

bu ise $z = z_0$ yani, xy -düzlemine paralel düzlemi verir.

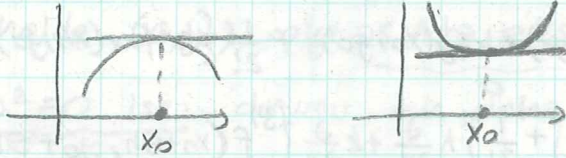
(3.5.1)'e benzer şekilde,

$$\begin{aligned} u = f(x, y, z, \dots) = 0 &\Rightarrow f_x(x_0, y_0, \dots) = 0 \\ &\Rightarrow f_y(x_0, y_0, \dots) = 0 \\ &\Rightarrow f_n(x_0, y_0, \dots) = 0 \end{aligned} \quad \dots (3.5.2)$$

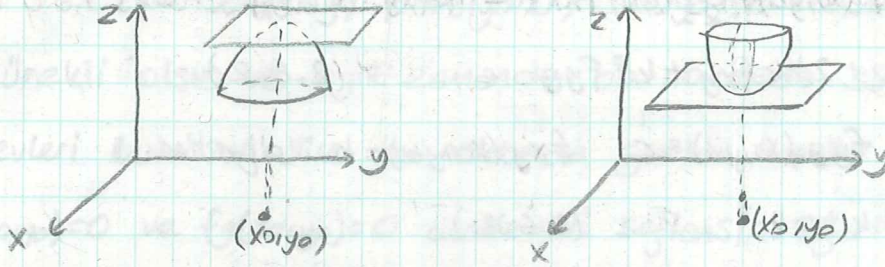
şeklinde n tane koşul bulunur. (Çok değişkenli fonksiyonların ekstremumunun olması için gerekli ve yeterli koşuldur.)



Türevlenebilen fonksiyonlar için fonksiyon (bir noktada) ekstremumdan geçiyorsa eğri teğete göre tek taraflıdır.

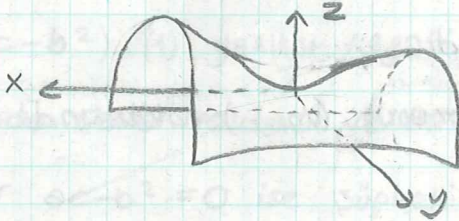


$z=f(x,y)$ türevlenebilir ve $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$ ise yüzey teğet düzlene göre bir taraftadır.



$f(x,y)=x^2-y^2$ alalım. (Hiperbolik paraboloid)

$f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ dir. Fonksiyon ekstremumdan geçmez.



3.6. $z=f(x,y)$ Fonksiyonunun Ekstremumunun Olması İçin

Yeterli Koşullar

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun f_x ve f_y parçalı türevleri (x_0,y_0) noktasında türevlenebilen fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. (x_0,y_0)

noktasında bir ekstremum olması için gerekli koşullar sağlansın,

yani ; $f_x(x_0,y_0)=0$ ve $f_y(x_0,y_0)=0$

olsun. Şimdi $f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) \dots \dots \dots (3.6.1)$

farkını inceleyelim:

(x_0,y_0) noktasında bir ekstremum olması için mutlak değerce yeterince küçük tüm h ve k için bu fark aynı işareti korunmalıdır. Eğer h ve k değerleri için bu fark pozitif ise o noktada

bir minimum, diğine negatif ise o noktada bir maksimum vardır.

(3.6.1) farkını Taylor formülüne açarsak,

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \{ h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) \} + \frac{1}{2!} \{ h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0) \} + \frac{1}{3!} \left\{ h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right\}^3 f(x_0+h, y_0+k) + O(s^3)$$

(3.6.1) farkı ;

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} \{ h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy} \} + O(s^2)$$

$$\text{olur. } F = h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy} \quad \text{--- (3.6.2)}$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) = a \quad f_{yy}(x_0, y_0) = c \quad f_{xy}(x_0, y_0) = b \text{ diyelim.}$$

$$F = ah^2 + 2bhk + ck^2 \quad \text{--- (3.6.3.)}$$

$$\text{olur. } \Delta F = a(h^2 + 2bhk + ck^2)$$

$$= (ah + bk)^2 + (ac - b^2)k^2$$

$ac - b^2 > 0$ ise $\Delta F > 0$ dir. Yani a ile F aynı işaretlidir.

$a < 0$ ise $F < 0$ dir. $a > 0$ ise $F > 0$ dir.

$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow z = f(x, y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasında bir maksimumu vardır.

$f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow z = f(x, y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasında bir minimumu vardır.

$$cF = c(ah^2 + 2bhk + ck^2)$$

$$= (bh + ck)^2 + (ac - b^2)h^2$$

$ac - b^2 > 0$ ise $cF > 0$ dir. Yani c ile F aynı işaretlidir.

$c < 0$ ise $F < 0$, $c > 0$ ise $F > 0$ dir.

$f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ ise o noktada maksimum, tersi için minimum vardır.

$ac - b^2 < 0$ ise ;

$$\Delta F = a(ah^2 + 2bhk + ck^2) = (ah + bk)^2 + (ac - b^2)k^2$$

1- $a \neq 0, k = 0, h \neq 0$ olsun.

$\Delta F > 0$ dir.

2- $a \neq 0, k \neq 0$ ve $ah+bk=0$ ise $a \cdot F < 0$ dir.

3- $a=c=0, h \neq 0, k \neq 0$ $F=2bhk=0$ dir. ($b \neq 0$)

0 halde (x_0, y_0) noktasında ekstremum yoktur.

$ac-b^2=0$ ise, durumu işin daha ileri analiz bilgileri gerekmektedir.

Bunu inceleyeceğiz. Bu duruma şüpheli durum diyeceğiz.

Bu yapıları teorem olarak ifade edelim:

Teorem 3.6.1. Bir $z=f(x,y)$ fonksiyonu, (x_0, y_0) noktası komşuluğunda tanımlı

ve sürekli olsun ve aynı zamanda bu noktada sürekli parçalı

türevleri bulunsun. Yine bu noktada gerekli koşullar sağlansın, yani:

$f_x(x_0, y_0)=0$ ve $f_y(x_0, y_0)=0$ denklemleri sağlansın. Eğer:

$$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0 \text{ ise } \dots (1)$$

fonksiyonun (x_0, y_0) noktasında ekstremumu vardır.

$f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ise ($f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ dir.) bu noktada bir max. vardır.

Eğer $(ac-b^2)$ (1) yazılışı negatif ise bu noktada ekstremum yoktur.

0 noktada sener noktası vardır.

Eğer $ac-b^2=0$ ise şüpheli durum vardır. İncelenmeyecektir.

$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$	+		-	0
f_{xx} veya f_{yy}	-max	+min	ekstremum yok sener nokt. var.	şüpheli durum

Örnek 3.6.1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3ax - 3by$ fonksiyonunun ekstremumunu araştırınız.

$$f_x = 2x + y - 3a = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad y = 2b - 2a$$

$$f_y = x + 2y - 3b = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad x = 2a - b$$

$$f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 2 \quad f_{xy} = 1$$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0 \text{ ekstremum vardır.}$$

Örnek 3.6.2 // $f(x,y) = 3axy - x^3 - y^3$ ekstremumlarını araştırınız.

$$f_x = 3ay - 3x^2 = 0 \quad ay = x^2 \quad y = \frac{x^2}{a}$$

$$f_y = 3ax - 3y^2 = 0 \quad ax = y^2 \quad a \cdot x = \frac{x^4}{a^2} \Rightarrow a^3 = x^3 \quad \underline{a = x} \vee \underline{a = 0}$$

$$A(0,0) \quad B(a,a)$$

$$f_{xx} = -6x \quad f_{yy} = -6y \quad f_{xy} = 3a$$

$$A(0,0) \text{ için, } f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 0 - 9a^2 < 0 \text{ sener nokt.}$$

$$B(a,a) \text{ için, } f_{xx}(a,a) \cdot f_{yy}(a,a) - f_{xy}^2(a,a) = 27a^2 > 0$$

$$f_{xx}(a,a) = -6a \quad a < 0 \text{ ise min.} \\ a > 0 \text{ ise max.}$$

Alıştırma

Aşağıdaki fonksiyonların ekstremumlarını araştırınız.

1- $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$

2- $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 2xy - x$

3- $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy + y - 2x$

4- $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 15$

5- $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$

6- $f(x,y) = x^2y - xy^2 - x$

7- $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy - x^2 - y^2$

8- $f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 8$

Çözümler :

8- $f_x = 24x^2 - 12y = 0 \Rightarrow y = 2x^2$

$f_y = -12x + 3y^2 = 0 \quad 4x = 4x^4 \quad 4x(1-x^3) = 0 \quad x=0, x=1$

$A(0,0) \quad B(1,2) \quad x=1, y=2 \quad \{C(1,-2) \text{ yoktur. } f_x \text{ 'i sağlanamaz.}\}$

$$f_{xx} = 48x \quad f_{yy} = 6y \quad f_{xy} = -12$$

$A(0,0)$ noktası için $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = -144 < 0$

ekstremum yok, sener noktası var.

$B(1,2)$ noktası için $f_{xx}(1,2) \cdot f_{yy}(1,2) - f_{xy}^2(1,2) = 48 \cdot 12 - 144 > 0$

ekstremin vardır. $f_{xx}(1/2) = 48 > 0$ 3 noktasında yüzeyin bir minimumu vardır.

$$f(1,2) = 8 + 8 - 24 + 8 = 0, z=0 \text{ minimum. (aşağıdaki nokta)}$$

$$f(0,0) = 8, z=8 \text{ olur. sener noktası.}$$

$$1- f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$$

$$\begin{cases} f_x = 2x - y + 2 = 0 \\ f_y = -x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{r} 2x - y + 2 = 0 \\ -2x + 4y + 4 = 0 \\ \hline y = -2 \quad x = -2 \end{array}$$

$$f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 2 \quad f_{xy} = -1$$

$$f_{xx}(-2,-2) \cdot f_{yy}(-2,-2) - f_{xy}^2(-2,-2) = 4 - 1 > 0 \text{ minimum vardır.}$$

$$f(-2,-2) = 4 - 4 + 4 - 4 - 4 - 4 = -8 \text{ dir.}$$

$$2- f(x,y) = -2x^2 - y^2 + 2xy - x$$

$$\begin{cases} f_x = -4x + 2y - 1 = 0 \\ f_y = 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x = y = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ Bu değerler fonksiyonu sağlar.}$$

$$f_{xx} = -4 \quad f_{yy} = -2 \quad f_{xy} = 2$$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = (-4)(-2) - 4 = 8 - 4 = 4 > 0$$

$f_{xx} < 0$ olduğundan $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ de maksimum vardır. (Yüzey denklemdir.)

$$4- x^3 + y^3 - 3xy + 15 = f(x,y)$$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 = y \\ x = y^2 \end{array}$$

$$x = x^4 \quad x(1 - x^3) = 0 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad y = 1$$

$$A(0,0) \quad B(1,1) \quad \{ C(1,-1) \text{ seçilmez.} \}$$

$$f_{xx} = 6y \quad f_{yy} = 6x \quad f_{xy} = -3$$

A için, $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = -9 < 0$ sener noktası vardır.

B için, $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 27 > 0$ minimum var. $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$ minimum vardır.

$$7- f(x,y) = x^3 + y^2 + xy - x^2 - y^2$$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + y - 2x = 0 \\ f_y = 3y^2 + x - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3x^2 - 2x + y = 0 \\ 3y^2 - 2y + x = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} y = -3x^2 + 2x \\ x = -3y^2 + 2y \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + y = 0 \\ 3y^2 - 2y + x = 0 \end{cases} \quad y = 2x - 3x^2 \quad \begin{matrix} f_{xx} = 6x - 2 \\ f_{yy} = 6y - 2 \end{matrix} \quad f_{xy} = 1$$

$$3(2x - 3x^2)^2 - 2(2x - 3x^2) + x = 0$$

$$x(9x^2 - 12x^2 + 6x - 1) = 0 \quad x = 0$$

$$x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} = 0 \quad \left\{ \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right), -1\left(\frac{1}{9}\right), 1\left(-\frac{1}{9}\right) \right\}$$

kökler bunlar olabilir.
bakalım.

$$-\frac{1}{27} - \frac{4}{27} \cdot \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \neq 0, \quad x = -\frac{1}{3} \text{ için.}$$

$$\frac{1}{27} - \frac{4}{27} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = 0 \quad x = \frac{1}{3} \text{ kök olur.}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} & x - \frac{1}{3} \\ \hline + x^3 - \frac{1}{3}x^2 & x^2 - x + \frac{1}{3} \\ \hline -x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} & \\ -x^2 + \frac{1}{3}x & \\ \hline \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} & \\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x - \frac{1}{3})(x^2 - x + \frac{1}{3}) = 0 \quad 0 \text{ ve } \frac{1}{3} \text{ gerçel köklerdir.}$$

$b^2 - 4ac \leq 0$ dir. (sarıdır.)

$$A(0,0) \quad B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 3 > 0 \text{ max. vardır. } (f_{xx}(0,0) = \underline{-2} \text{ olduğundan})$$

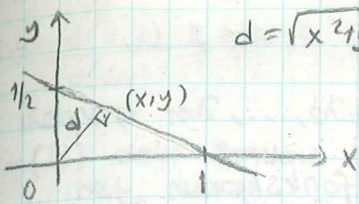
$$f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \cdot f_{yy}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) - f_{xy}^2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -1 < 0 \text{ senev nokt. vardır.}$$

3.7. Yan Koşullu Ekstremler

$z = f(x,y)$ için x ve y değişkenleri fonksiyonun tanım bölgesinde serbestçe değişiyordu.

Bazı durumlarda örneğin $g(x,y) = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde fonksiyonun ekstremleri aranır.

Örnek olarak: xy -düzleminde koordinat başlangıcının $x + 2y - 1 = 0$ doğrusunun, noktelarına olan uzaklıkları karesinin en küçüğünü bulunuz.



$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow d^2 = x^2 + y^2$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(x) = x^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2$$

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{4} \quad f'(x) = \frac{10x - 2}{4} = 0 \Rightarrow x = 1/5$$

$$y = \frac{1 - 1/5}{2} = \frac{2}{5} \quad \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \text{ minimum vardır.}$$

$$f\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{1}{5} \text{ minimum değeridir. (iki değişkenli fonksiyondur.)}$$

Üç değişkenli fonksiyon için, örneğin:

$w = f(x, y, z)$ fonksiyonunda $g(x, y, z) = 0$ yan koşulu verilirse;

$z = h(x, y)$ gibi $w = f(x, y, h(x, y))$ olarak iki değişkenli fonksiyonlardaki gibi ekstremum aranılır. Bazen bunu söylemek zordur. Bunun yerine Lagrange yan koşulu (Lagrange çarpımı kuralı) uygulanır.

Değişkenlerden hiçbirisi diğerine bağlı kalmaksızın ekstremum aranılır.

3.8. Lagrange Çarpım Kuralı

Ekstremini aranan fonksiyon n -değişkenli,

$$U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

fonksiyonu olsun. Bu n -değişken aralarında

(3.8.1) ...

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

denklemlerle bağlı olsunlar. Bütün bu fonksiyonların tanım kümesi aynıdır, ve hepsinin parçalı türevleri vardır. (1. ve 2. basamaktan tüm değişkenlere göre parçalı türevleri mevcut bulunsun.) Değişken sayısı m tane, ve fonksiyon sayısı n olduğundan $m < n$ dir. Bu takdirde

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

belirlenmesi gereken sabit çarpımlar olmak üzere,

$$1 - L = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m \quad (3.8.2)$$

fonksiyonu oluşturulur. Sonra

$$2 - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \quad (3.8.3)$$

denklemleri yazılır.

3- n tane $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenli ve m tane $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ çarpanı (3.8.1) ve (3.8.3) denklemlerinden bulunur. Ve istenen fonksiyonun yan koşul altında ekstremum yeri, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koordinatları olur.

Bu kurala Lagrange Çarpanı Kuralı denir.

Örnek 3.8.1., $f(x,y) = xy$ fonksiyonunun $2x+3y-12=0$ yan koşulu altında ekstremumunu araştırınız.

Çözüm: $L = xy + \lambda(2x+3y-12)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x + 3\lambda = 0$$

$y = -2\lambda$ ve $x = -3\lambda$ denklemleri yazarsak,

$$2(-3\lambda) + 3(-2\lambda) - 12 = 0 \Rightarrow -6\lambda - 6\lambda = +12 \Rightarrow \lambda = -1$$

$x = 3$ $y = 2$ noktasında ekstremum vardır.

$$f(x,y) = xy \Rightarrow f(3,2) = 6$$

$x = 0 \Rightarrow y = 4$ $(0,4)$ için $f(0,4) = 0$ dir.

O halde $(3,2)$ noktasında bir maksimum vardır.

Örnekler

1- $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + xy$ fonksiyonunun $2x+y=1$ koşulu altında,

2- $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x$ " $x-2y=4$ " " ,

ekstreminin bulunuz.

3- $x = u-v+w$ $y = u^2 - v^2 - w^2$ $z = u^3 + v$ ise

a- $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = ?$ b- Eğer bu jacobian bir B bölgesinde sıfır değilse bunun alanını yazınız.

4- xy düzleminde bir B bölgesi $xy=b$ $x-y=2$ ve $y=0$ doğruları tarafından sınırlanmıştır.

a- $x = u+v$ $y = u-v$ dönüşümü altında B bölgesinin uv -düzlemindeki c bölgesini belirtiniz.

b- $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = ?$

c- (B) deki sonucu B ve C'nin alanlarının oranı ile karşılaştırınız.

5- $u = \frac{x+y}{1-xy}$ $v = \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$ sistemi veriliyor. U ile v'nin bağılı olduğunu gösterin ve bu fonksiyonel bağıntıyı bulunuz.

6- $u = \frac{x-y}{x-z}$ $v = \frac{y-z}{y-x}$ $w = \frac{z-x}{z-y}$ fonksiyonların bağılı olup olmadığını

araştırınız ve bağılı iseler bağıntıyı bulunuz.

7- $u = x+y+2$, $v = xy+xz$, $w = x^2+y^2+z^2+2yz$ " " "

8- $f(x,y) = x^2+y^3-3x-12y+20$ fonksiyonunun ekstremumunu araştırınız.

9- Üstü açık dik paralelyüz şeklinde bir kutunun hacminin 32 br^3 olması isteniyor. Toplam yüzey alanının minimum olması için kutunun boyutları ne olmalıdır?

10- $f(x,y) = x^2+y^2$ fonksiyonunun $x^2+8xy+7y^2-225=0$ koşulu altında ekstre-
mumunu araştırınız?

11- $(1,0)$ noktasının $y^2=4x$ parabolüne olan uzaklığın karesinin en küçüğünü bulunuz.

12- $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ fonksiyonunun $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$ ve $x+y-z=0$ koşulları
altında ekstremumlarını araştırınız ve bunun geometrik yorumunu yapınız.

13- α tabanı ve bunun karşısındaki açısı sabit olan tüm üçgenler arasında alanı maksimum olanı hangisidir.

14- kenarları a, b, c, d uzunluklarında olan bütün dörtgenler arasında alanı maksimum olanı hangisidir.

Çözümler -

1- $L = 2x^2 - y^2 + xy + \lambda(2x+y-1) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x + y + 2\lambda = 0$ $\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + x + \lambda = 0$

$x = -\frac{5}{9}\lambda$ $y = \frac{2}{9}\lambda$

$$-\frac{10\lambda}{9} + \frac{2}{9}\lambda = 1 \quad \lambda = -\frac{9}{8}, \quad x = -\frac{5}{9} \cdot \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{5}{8} \quad y = \frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{9}{8}\right) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{5}{8}, -\frac{2}{8}\right) = \frac{9}{16} > 0$$

$$2x+y-1=0 \quad x=0 \Rightarrow y=1 \quad f(0,1)=-1 \quad \text{maksimum vardır.}$$

$$2- f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x \quad x - 2y - 4 = 0$$

$$\mathcal{L} = x^2 + 2y^2 - 2x + \lambda(x - 2y - 4) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - 2 + \lambda = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 4y - 2\lambda = 0$$

$$x = \frac{1}{2}(2 - \lambda) \quad y = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{1}{2}(2 - \lambda) - 2 \cdot \frac{\lambda}{2} - 4 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\lambda}{2} - \lambda - 4 = 0 \quad -\frac{3\lambda}{2} = 3 \quad \lambda = -2$$

$$x = 2 \quad y = -1 \quad M(2, -1)$$

$$f(2, -1) = 4 + 2 - 4 = 2$$

$$x=0, y=-2 \quad (0, -2) \quad f(0, -2) = 0 + 8 - 0 = 8 > 2 \quad \text{minimum vardır.}$$

3-

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2u & -2v & -2w \\ 3u^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2u + 6vu^2 + 2w + 6wu^2 \neq 0$$

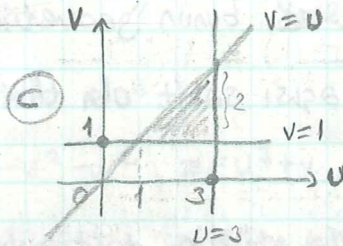
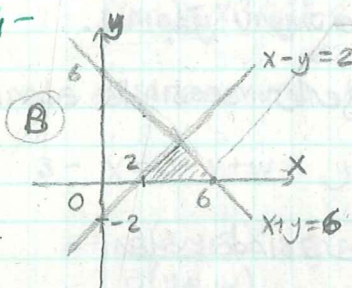
Fonksiyonel determinat sıfırdan

$$\begin{cases} x = F(u,v,w) \\ y = G(u,v,w) \\ z = H(u,v,w) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = f(x,y,z) \\ v = g(x,y,z) \\ w = h(x,y,z) \end{cases}$$

farklı olduğundan yandaki gibi bir

ters dönüşümü vardır. Yani u,v,w ya göre gözlemlenir.

4-



$$x+y = u+v+u-v = 2u = 6 \quad u = 3$$

$$x-y = u+v-u+v = 2 \quad v = 1$$

$$y=0 \quad u-v=0 \quad u=v$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{aligned} x+y &= 6 \\ x-y &= 2 \\ \hline y &= 2. \end{aligned}$$

$$B'de \quad \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \text{ br.}$$

$$C'de \quad \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ br.}$$

$$\frac{A(B)}{A(C)} = 2 \text{ br.}$$

$$\frac{dydx}{A(B)} = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \frac{du \cdot dv}{A(C)}$$

$$4 = |-2| \cdot 2$$

$$5- \frac{\partial(u/v)}{\partial(x/y)} = \frac{u_x v_y}{v_x v_y} = \left| \begin{array}{cc} \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} & \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} \\ \frac{(1-xy)^2 - (x+y)^2}{(1+x^2)^2 (1+y^2)^2} & \frac{(1-xy)^2 - (x+y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{(1-xy)^2 - (x+y)^2}{(1-xy)^2 (1+x^2) (1+y^2)} \left| \begin{array}{cc} \frac{1+y^2}{1} & \frac{1+x^2}{1} \\ \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2} \end{array} \right| = 0$$

$$x+y = u(1-xy)$$

$$1-xy = \frac{x+y}{u}$$

$$1+x^2 = ux - x^2uy + \frac{x+y}{u} = \frac{u^2x - x^2u^2y + x+y}{u}$$

$$1+y^2 = uy - uxy^2 + \frac{x+y}{u} = \frac{u^2y - u^2xy^2 + x+y}{u}$$

$$x+y = u - xuy \Rightarrow y = -x + u - xuy$$

$$y = \frac{u-x}{1+xu}$$

$$\left\{ x + \left(\frac{u-x}{1+xu} \right) = u \left(1 - x \left(\frac{u-x}{1+xu} \right) \right) \right\}$$

$$1+y^2 = 1 + \left(\frac{u-x}{1+xu} \right)^2$$

$$= \frac{1+2xu+x^2u^2+u^2-2xu+x^2}{(1+xu)^2}$$

$$= \frac{(1+u^2)(1+x^2)}{(1+xu)^2}$$

$$\left\{ v = \frac{u(1-xy)^2}{(1+x^2)(1+u^2)(1+x^2)} = \dots = \frac{u}{1+u^2} // \right\} \text{olma!!}$$

$$y = \frac{u-x}{1+ux} \quad x+y = u \left(1 - x \cdot \frac{u-x}{1+ux} \right) = \frac{u(1+x^2)}{1+ux}$$

$$1-xy = 1 - x \cdot \frac{u-x}{1+ux} = \frac{1+ux - xu + x^2}{1+ux} = \frac{1+x^2}{1+ux}$$

$$v = \frac{\frac{u(1+x^2)}{1+ux} \cdot \frac{1+x^2}{1+ux}}{1+x^2 \frac{(1+u^2)(1+x^2)}{(1+ux)^2}} = \frac{u}{1+u^2} //$$

$$6- \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{y-z}{(x-z)^2} & \frac{z-x}{(x-z)^2} & \frac{x-y}{(x-z)^2} \\ \frac{y-z}{(y-x)^2} & \frac{z-x}{(y-x)^2} & \frac{x-y}{(y-x)^2} \\ \frac{y-z}{(z-y)^2} & \frac{z-x}{(z-y)^2} & \frac{x-y}{(z-y)^2} \end{vmatrix} = 0$$

bağımlıdır.

$$u.v.w = \frac{x-y}{x-z} \cdot \frac{y-z}{y-x} \cdot \frac{z-x}{z-y} = (-1)(-1)(-1) = -1$$

herhangi birisi diğer ikisine bağımlıdır. ($uv = -\frac{1}{w}$ örneğindeki gibi.) //

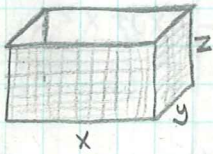
$$7- \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x & x \\ 2x & 2y+2z & 2z+2y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{bağımlıdır.}$$

$$u^2 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \underbrace{2xy}_{\text{yak}} + \underbrace{2xz + 2yz}_{\text{var}}$$

$$2v = 2xy + 2xz$$

$$u^2 - 2v = w \quad \text{olur.} //$$

8-



$$V = xyz = 32 \text{ br}^3 \quad xyz - 32 = 0$$

$$S = 2.y.z + 2xz + xy \text{ br}^2$$

$$L = 2yz + 2xz + xy + \lambda(xyz - 32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2z + y + \lambda yz = 0$$

$$2z\lambda + xy$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2z + x + \lambda xz = 0$$

$$2zy + xy$$

$$\left. \begin{matrix} 2z\lambda + xy \\ 2zy + xy \end{matrix} \right\} x=y$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2y + 2x + \lambda xy = 0$$

$$z(x-y) = 0 \quad z \neq 0 \quad (\text{üç boyut olduğu için.})$$

$$\left. \begin{matrix} 2yz + xy \\ 2yz + 2xz \end{matrix} \right\} x(y-2z) = 0 \quad x \neq 0 \quad y = 2z$$

$$z = 2 \quad x = y = 4 \text{ olur} //$$

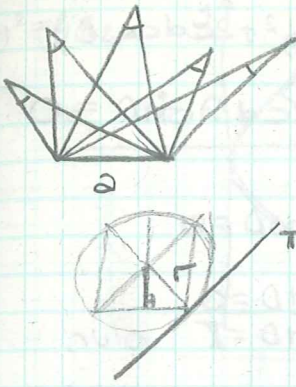
$$x = 4 \quad y = 1 \text{ için } z = 8 \text{ olur.}$$

$$S = 2yz + 2xz + xy = 16 + 16 + 16 = 48 \text{ br}^2$$

$$S = 16 + 64 + 4 = 84 \text{ br}^2$$

0 halde 48 br 'li alan min. olur.

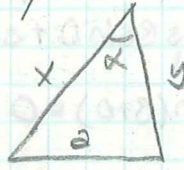
13-



Çember açılı kirisi eşit açı altında görünür.



Aynı yayı gören çember açıları eşittir.



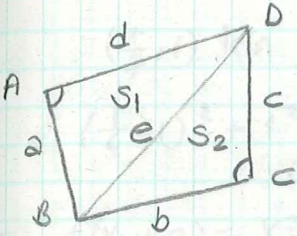
$$S = \frac{1}{2} xy \sin \alpha$$

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$$

$$L = \frac{1}{2} xy \sin \alpha + \lambda (x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha - a^2) \quad (x \text{ ve } y'yi \text{ bul})$$

$x=y$ olmalıdır. (İkizkenar üçgen)

14-



$$e^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{yarı} \\ \text{köşü} \end{array} \right\}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} ad \sin A \quad S_2 = \frac{1}{2} bc \sin C$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} ad \sin A + \frac{1}{2} bc \sin C + \lambda (a^2 + d^2 - 2ad \cos A - b^2 - c^2 + 2bc \cos C)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial C} = 0$$

15- Lagrange Çarpım Kuralı'nı kanıtlayınız. (3 sayfa ileride)

$$(13'ün devamı) \quad L = \frac{1}{2} xy \sin \alpha + \lambda (x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha - a^2)$$

$$L_x = \frac{1}{2} y \sin \alpha + 2\lambda x - 2y \cos \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2y \cos \alpha - \frac{1}{2} y \sin \alpha}{2x}$$

$$L_y = \frac{1}{2} x \sin \alpha + 2\lambda y - 2x \cos \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2x \cos \alpha - \frac{1}{2} x \sin \alpha}{2y}$$

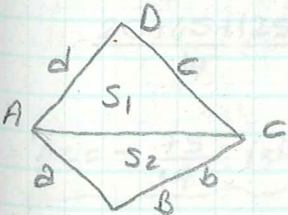
$$\Rightarrow \frac{2y \cos \alpha - \frac{1}{2} y \sin \alpha}{2x} = \frac{2x \cos \alpha - \frac{1}{2} x \sin \alpha}{2y}$$

$$4y^2 \cos \alpha - y^2 \sin \alpha = 4x^2 \cos \alpha - x^2 \sin \alpha$$

$$y^2 (4 \cos \alpha - \sin \alpha) = x^2 (4 \cos \alpha - \sin \alpha) \quad 4 \cos \alpha \neq \sin \alpha$$

$x=y$ yani ikizkenar üçgen dir.

14.'ün devamı



$$S_1 = \frac{1}{2} ab \sin B \quad S_2 = \frac{1}{2} cd \sin D \quad S = S_1 + S_2$$

$$e^2 = \dots$$

$$L = \frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin D + \lambda (a^2 + b^2 - 2ab \cos B - c^2 - d^2 + 2cd \cos D)$$

$$L_B = \frac{1}{2} ab \cos B + 2ab \lambda \sin B = 0, L_A = \frac{1}{2} cd \cos D - 2cd \lambda \sin D = 0$$

$$\lambda = -\frac{\frac{1}{2} \cos B}{\sin B} = -\frac{\frac{1}{2} \cos D}{\sin D} \Rightarrow \cos B \sin D + \sin B \cos D = 0$$

$$\Rightarrow \sin(B+D) = 0$$

$$B+D=0$$

$$B+D=\pi$$

olur.

Bu ise kirisler dörtgenidir.

(Karsilikli açilar bütünler, yani toplamı 180° olur.)

$$10 - f(x,y) = x^2 + y^2 \quad x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$$

$$L = x^2 + y^2 + \lambda (x^2 + 8xy + 7y^2 - 225)$$

$$L_x = 2x + 2\lambda x + 8\lambda y = 0$$

$$L_y = 2y + 14\lambda y + 8\lambda x = 0$$

$$B^2 - 4AC = 64 - 28 > 0 \text{ hiperbol tipinde bir egridir.}$$

$$(1+\lambda)x + 4\lambda y = 0$$

$$4\lambda x + (7\lambda+1)y = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 4\lambda \\ 4\lambda & 7\lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$7\lambda + 7\lambda^2 + 1 + \lambda - 16\lambda^2 = 0$$

$$-9\lambda^2 + 8\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{8}{9}\lambda - \frac{1}{9} = 0$$

$$1, -\frac{1}{9} //$$

$$\rightarrow 4x + 8y = 0 \quad x = -2y$$

$$\lambda = 1; 4y^2 - 16y^2 + 7y^2 - 225 = 0 \quad -5y^2 = 225 \quad y^2 = -45 \text{ olmaz}$$

$$\lambda = -\frac{1}{9}; -\frac{4x}{9} + (-\frac{7}{9} + 1)y = 0$$

$$-4x + 2y = 0 \quad y = 2x$$

$$x^2 + 16x^2 + 28x^2 = 225$$

$$45x^2 = 225$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

$$8\sqrt{5}y + 7y^2 = 220$$

$$y_{1,2} = \frac{-8\sqrt{5} \pm \sqrt{1620}}{14}$$

$y = 2x$ der $x = \sqrt{5}$ ve $y = 2\sqrt{5}$ denklemleri saglarlar.

$$A(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 25), B(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 25) \rightarrow (x=1 \text{ isin bel derak})$$

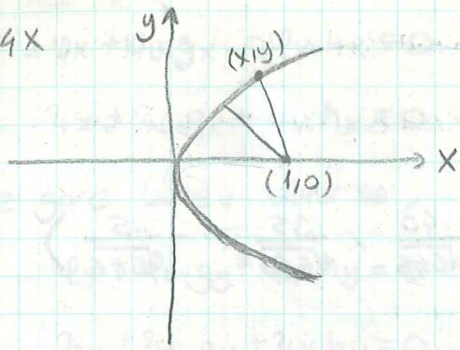
$$7x + 8y + 7y^2 - 225 = 0$$

$$7y^2 + 8y - 224 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{1584}}{7} \approx 5 > 0$$

0 halde A ve B noktaları minimum noktalarıdır.

$$11 - y^2 = 4x$$



$$f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$$

597

$$L = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(y^2 - 4x)$$

$$L_x = 2(x-1) - 4\lambda = 0$$

$$L_y = 2y + 2\lambda y = 0, y(1+\lambda) = 0$$

$$y=0 \text{ veya } \lambda=-1 \text{ dir.}$$

$$y \neq 0, \lambda=-1$$

$$2(x-1)+4=0 \quad x=-1 \text{ olmaz.}$$

0 halde bağımsız noktasıdır. 0 halde $y=0$ olmalıdır.

$(0,0)$ noktası uzaklığın karesinin minimum olduğu yerdir.

$$\left(\frac{1}{4}, 1\right) \text{ için } f(0,0)=1 \text{ dir.}$$

$$\left(\frac{1}{4}-1\right)^2 + 1^2 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16} > 0 \text{ minimum vardır.}$$

$$> 1$$

$$12 - f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ düzlem denklemdir.}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0 \text{ elipsoid, } x+y-z=0 \text{ düzlemdir.}$$

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 \right) + \lambda_2 (x+y-z)$$

$$L_x = 2x + \frac{\lambda_1 x}{2} + \lambda_2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-\lambda_2}{2 + \frac{\lambda_1}{2}} \Rightarrow x = \frac{-2\lambda_2}{4 + \lambda_1}$$

$$L_y = 2y + \frac{2\lambda_1 y}{5} + \lambda_2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{\lambda_2}{2 + \frac{2\lambda_1}{5}} \Rightarrow y = \frac{-5\lambda_2}{10 + 2\lambda_1}$$

$$L_z = 2z + \frac{2\lambda_1}{25} - \lambda_2 = 0 \Rightarrow z = \frac{\lambda_2}{2 + \frac{2\lambda_1}{25}} \Rightarrow z = \frac{25\lambda_2}{50 + \lambda_1}$$

$$-\frac{2\lambda_2}{4 + \lambda_1} - \frac{5\lambda_2}{10 + 2\lambda_1} - \frac{25\lambda_2}{50 + \lambda_1} = 0 \quad \lambda_2 \neq 0$$

$$17\lambda_1^2 + 245\lambda_1 + 750 = 0 \quad \lambda_1 = -10 \quad \lambda_2 = -\frac{75}{17}$$

$$x = \frac{1}{3}\lambda_2, y = \frac{1}{2}\lambda_2, z = \frac{5}{6}\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = -10 \text{ için}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{180}{19} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 6\sqrt{\frac{5}{19}}$$

$$A \left(2\sqrt{\frac{5}{19}}, 3\sqrt{\frac{5}{19}}, 5\sqrt{\frac{5}{19}} \right), B \left(-2\sqrt{\frac{5}{19}}, -3\sqrt{\frac{5}{19}}, -5\sqrt{\frac{5}{19}} \right)$$

$$\frac{20 + 45 + 125}{19} = 10 \quad // \quad (x^2 + y^2 + z^2 = f(x, y, z) \text{ de yerine yazarak})$$

$$\lambda_2 = -\frac{75}{17} \text{ için ;}$$

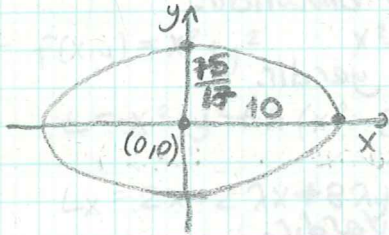
$$x = \frac{34}{7} \lambda_2 \quad y = -\frac{17}{4} \lambda_2 \quad z = \frac{17}{28} \lambda_2$$

$$191614 \lambda_2^2 = 1960 \quad \lambda_2 = \pm \frac{140}{17\sqrt{646}}$$

$$C\left(\frac{40}{\sqrt{646}}, -\frac{35}{\sqrt{646}}, \frac{5}{\sqrt{646}}\right) \quad D\left(-\frac{40}{\sqrt{646}}, \frac{35}{\sqrt{646}}, -\frac{5}{\sqrt{646}}\right)$$

$$\frac{1600 + 1225 + 25}{\sqrt{646}} = \frac{75}{17}$$

0 halde max değer 10, minimum değer $\frac{75}{17}$ dir.



(Bu soru şu şekilde verilebilirdi ;

Elipsoid üzerindeki noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığın karesinin en büyük ve en küçük değeri nedir. İki koşul altında.)

Burada, yüzeyle düzlemin arakesiti elips olur.

15- Lagrange çarpan kuralı'nı kanıtlayınız.

İspat,, İspatı 4 değişkenli $w = f(x,y,u,v)$ fonksiyonu için yapalım.

Bir $w = f(x,y,u,v)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu dört değişken arasında

$$\varphi(x,y,u,v) = 0 \quad \lambda(x,y,u,v) = 0 \quad \text{--- (3.8.4)}$$

yan koşuluna bağlı bulunsunlar. Kabul edelim ki, $w = f(x,y,u,v)$ fonksiyonunun, (x_0, y_0, u_0, v_0) noktasında (3.8.4) yan koşulu altında bir

ekstremumu olsun ve $\frac{\partial(\varphi, \lambda)}{\partial(u,v)} \neq 0$ olsun. (Bunun anlamı, kapalı fonksiyonlarda varlık teoremine göre $\begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y) \end{cases}$ biçiminde sözülebilir.)

Bunları, $w = f(x,y,u,v)$ de yerine yazarsak,

$w = f(x,y, g(x,y), h(x,y))$ olur. Artık bu fonksiyonun (x_0, y_0) noktasında

(3.8.4) koşulları altında ekstremum olması için gerekli koşullar,

$$\begin{cases} f_x + f_u \cdot g_x + f_v \cdot h_x = 0 \\ f_y + f_u \cdot g_y + f_v \cdot h_y = 0 \end{cases} \quad \text{--- (3.8.5) dır.}$$

f_x, g_x, h_x buradan bulunabildiği gibi, (3.8.4) ün türevi alınarak da, bulunabilir.

$$\varphi_x + \varphi_u g_x + \varphi_v h_x = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{--- (3.8.6)}$$

$$z_x + z_u g_x + z_v h_x = 0$$

y'ye göre türev alınırsa,

$$\varphi_y + \varphi_u g_y + \varphi_v h_y = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{--- (3.8.7)}$$

$$z_y + z_u g_y + z_v h_y = 0$$

Şimdi λ_1 ve λ_2 'yi o şekilde seçelim ki, (x_0, y_0, u_0, v_0) yerinde ;

$$\left. \begin{array}{l} f_u + \lambda_1 \varphi_u + \lambda_2 z_u = 0 \\ f_v + \lambda_1 \varphi_v + \lambda_2 z_v = 0 \end{array} \right\} \text{--- (3.8.8)}$$

{ (3.8.6) nın birincisini λ_1 ile, ikincisini λ_2 ile çarpıp ve (3.8.5) in birincisiyle taraf tarafa toplarsak, }

denklemleri sağlansın öyle ki :

$$f_x + f_u g_x + f_v h_x + \lambda_1 (\varphi_x + \varphi_u g_x + \varphi_v h_x) + \lambda_2 (z_x + z_u g_x + z_v h_x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f_v + \lambda_1 \varphi_v + \lambda_2 z_v + (f_u + \lambda_1 \varphi_u + \lambda_2 z_u) g_x + (f_x + \lambda_1 \varphi_x + \lambda_2 z_x) h_x = 0 \\ f_y + \lambda_1 \varphi_y + \lambda_2 z_y + (f_u + \lambda_1 \varphi_u + \lambda_2 z_u) g_y + (f_x + \lambda_1 \varphi_x + \lambda_2 z_x) h_y = 0 \end{array} \right\} \text{--- (3.8.9)}$$

$$f_x + \lambda_1 \varphi_x + \lambda_2 z_x = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{--- (3.8.10)}$$

$$f_y + \lambda_1 \varphi_y + \lambda_2 z_y = 0$$

(x_0, y_0, u_0, v_0) , λ_1, λ_2 hesaplanır.

$$\left. \begin{array}{l} f_u + \lambda_1 \varphi_u + \lambda_2 z_u = 0 \\ f_v + \lambda_1 \varphi_v + \lambda_2 z_v = 0 \end{array} \right\} \text{--- (3.8.11)}$$

Denek ki, $w = f(x, y, u, v)$ fonksiyonu (x_0, y_0, u_0, v_0) noktasında $\varphi(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ ve $z(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ yan koşulları altında bir ekstremuma sahipse λ_1 ve λ_2 öyle iki sayı vardır ki, (3.8.10) ve (3.8.11) denklemini sağlar.

İşte buna Lagrange Çarpım Kuralı denir. Bu ise,

$L = f + \lambda_1 \varphi + \lambda_2 z$ fonksiyonu için

$$\frac{\partial L}{\partial x} = f_x + \lambda_1 \varphi_x + \lambda_2 z_x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = f_u + \lambda_1 \varphi_u + \lambda_2 z_u = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = f_y + \lambda_1 \varphi_y + \lambda_2 z_y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = f_v + \lambda_1 \varphi_v + \lambda_2 z_v = 0 \quad \text{dır.}$$

3.9. İntegral İşareti Altında Türevleme

Bu kesimde de integral işareti altında türevleme için Leibnitz kuralını göreceğiz. Daha önce analiz derslerinde $\int_a^b f(x) dx$ belirli integralin değişkenden bağımsız olduğunu görmüştük. Yani,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(v) dv \text{ idi.}$$

Eğer bu belirli integralde, örneğin: üst sınır değişken olarak alınır, integral bu değişkenin bir fonksiyonu olur. Örneğin: $f(x) = \int_a^x f(t) dt$ gibi. Benzer şekilde $\int_a^b f(x,t) dx$, $\int_a^{u(t)} f(t) dt$, $\int_a^{u(t)} f(x,t) dx$, $\int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f(x,t) dx$ integrallerinin tümü t 'nin fonksiyonlarıdır.

Leibnitz Kuralının İspatı

$$f(t) = \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f(x,t) dx \text{ olsun.}$$

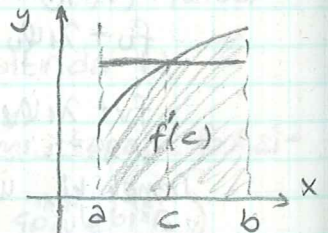
$$\begin{aligned} \Delta F(t) &= F(t+\Delta t) - F(t) = \int_{u_1(t+\Delta t)}^{u_2(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t) dx - \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f(x,t) dx \\ &= \int_{u_1(t+\Delta t)}^{u_2(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t) dx + \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f(x,t+\Delta t) dx + \int_{u_2(t)}^{u_2(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t) dx - \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f(x,t) dx \end{aligned}$$

Bunlara integral için ortalama değer teoremini uygulayalım.

$$= \int_{u_2(t)}^{u_2(t+\Delta t)} [f(t,t+\Delta t) - f(x,t)] dx + \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f(x,t+\Delta t) dx - \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f(x,t) dx$$

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c) \quad a=t \quad b=(t+\Delta t)$$

t ile $t+\Delta t$ arasında bir ξ vardır. $t < \xi < t+\Delta t$



$$= \Delta t \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f_t(x, \xi) dx + \overbrace{[u_2(t+\Delta t) - u_2(t)]}^{\Delta u_2} f(\xi_1, t+\Delta t) - \overbrace{[u_1(t+\Delta t) - u_1(t)]}^{\Delta u_1} f(\xi_2, t+\Delta t)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f_t(x, \xi) dx + f(\xi, t+\Delta t) \frac{\Delta u_2}{\Delta t} - f(\xi_2, t+\Delta t) \frac{\Delta u_1}{\Delta t} \right\}$$

$$t < \xi < t+\Delta t \quad u_2(t) < \xi < u_2(t+\Delta t) \quad u_2(t) < \xi_2 < u_1(t+\Delta t)$$

$$F'(t) = \frac{\partial F}{\partial t} = \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} f_t(x,t) dx + f(u_2(t), u_2'(t)) - f(u_1(t), u_1'(t))$$

Eğer $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ birer sabit iseler $u_1'(t) = u_2'(t) = 0$ olacağından

$$\int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right] dx = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_a^b f(x,t) dx \right] \text{ olur.}$$

örnek 3.9.1 // $f(t) = \int_t^{t^2} \frac{\sin(tx)}{x} dx$ integralinin türevini bulunuz.

601

$$\begin{aligned} \text{Çözüm} // f'(t) &= \int_t^{t^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin(tx)}{x} \right) \right] dx + \sin \left(\frac{t \cdot t^2}{t^2} \right) \cdot 2t - \frac{\sin(t \cdot t)}{t} \cdot 1 \\ &= \int_t^{t^2} \cos(tx) dx + 2 \frac{\sin(t^3)}{t} - \frac{\sin(t^2)}{t} \\ &= \frac{\sin(tx)}{t} \Big|_t^{t^2} + 2 \frac{\sin(t^3)}{t} - \frac{\sin(t^2)}{t} \\ &= \frac{\sin(t^3)}{t} - \frac{\sin(t^2)}{t} + 2 \frac{\sin(t^3)}{t} - \frac{\sin(t^2)}{t} = 3 \frac{\sin(t^3)}{t} - 2 \frac{\sin(t^2)}{t} \\ &= \frac{1}{t} (3\sin t^3 - 2\sin t^2) // \end{aligned}$$

Soru // $\int_0^2 (x^2 + t^2) dx$ integralinin türevini bulunuz. (örnek 3.9.2)

$$\text{Çözüm} // \int_0^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (x^2 + t^2) \right\} dx = \int_0^2 2t dx = 4t$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^2 (x^2 + t^2) dx \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{x^3}{3} + t^2 x \right\} \Big|_0^2 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{8}{3} + 2t^2 \right) = 4t$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^2 (x^2 + t^2) dx = \int_0^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (x^2 + t^2) \right\} dx$$

örnek 3.9.3 // $1 < t$ olmak üzere, $\int_0^{\pi} \frac{dx}{t - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{t^2 - 1}} \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{dx}{(2 - \cos x)^2} = ?$

$$\text{Çözüm} // F(t) = \int_0^{\pi} \frac{1}{(t - \cos x)} dx \text{ ise}$$

$$F'(t) = - \int_0^{\pi} \frac{1}{(t - \cos x)^2} = - \frac{\pi t}{(t^2 - 1)^{3/2}}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(t - \cos x)^2} = \frac{\pi t}{(t^2 - 1)^{3/2}} \text{ olur. } t=2 \text{ için,}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\pi}{3^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} //$$

Alistirmalar

$$1 - \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = ?$$

$$2 - \int_0^{\infty} \frac{dx}{\alpha + x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = ? \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$3 - \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \Rightarrow \int_0^1 x^{n-1} (\ln x)^k dx = ?$$

4- $\int_{\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}} \cos(tx^2) dx$ integralinin türevini bulunuz. // I.S.E. denö

5- $\int_0^{t^2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right) dx$ " " " // müşöp

6- $|t| < 1$ için, $\int_0^\pi \ln(1+t \cos x) dx = \pi \ln(1+\sqrt{1-t^2})$ olduğunu gösterin.

7- $\int_0^\pi \ln(1-2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \begin{cases} \pi \ln \alpha^2, & |\alpha| > 1 \text{ ise} \\ 0, & |\alpha| < 1 \text{ ise} \end{cases}$ olduğunu gösterin.

$|\alpha| = 1$ durumunu inceleyin.

Gözümlemler

1- $\int_0^\infty (-1)^n x^n e^{-\alpha x} dx = (-1)(-2) \dots (-n) \alpha^{-(n+1)}$ (Leibniz 'de t yerine n yazarak)
 $= \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^n dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$

$\alpha = 1$ için $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!$

2- t yerine α gelmiş, sınırlar sabit olduğundan

$$\int_0^\infty (\alpha+x^2)^{-1} dx = \frac{\pi}{2} (\alpha)^{-1/2}$$

$$\int_0^\infty (-1)(-2) \dots (-n) (\alpha+x^2)^{-(n+1)} dx = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{2n+1}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty (-1)^n n! \frac{1}{(\alpha+x^2)^{n+1}} dx = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1}}$$

$\alpha = 1$ için eşitlik sağlanır. // I.S.E. denö

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n! \cdot 2^{n+1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{n+2}}$$

3- $y = x^{n-1} \ln x \Rightarrow \ln y = (n-1) \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x \Rightarrow y' = x^{n-1} \ln x$

$y'' = x^{n-1} (\ln x)^2$, $y''' = x^{n-1} (\ln x)^3$ k defa türev alırsak,

$$\int_0^1 x^{n-1} (\ln x)^k dx = (-1)(-2) \dots (-k) n^{-(k+1)} = \frac{(-1)^k k!}{n^{k+1}} //$$

6- $F(t) = \int_0^\pi \ln(1+t \cos x) dx = \pi \ln(1+\sqrt{1-t^2})$ olduğunu gösteriniz. $|t| < 1$

$$F'(t) = \int_0^\pi \frac{\cos x}{1+t \cos x} dx \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{\cos x}{a+b \cos x} dx &= \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a+b \cos x} \\ \int \frac{dx}{a+b \cos x} &= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{x}{t} \Big|_0^\pi - \frac{1}{t} \int_0^\pi \frac{dx}{1+t \cos x}$$

$$= \frac{\pi}{t} - \frac{1}{t} \left\{ \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} \cdot \tan \frac{x}{2} \Big|_0^\pi \right\}$$

$$F'(t) = \frac{\pi}{t} - \frac{1}{t} \left\{ \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \left(\operatorname{Arctan} \frac{\infty}{\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}} - \operatorname{Arctan} 0 \right) \right\} = \frac{\pi}{t} - \frac{1}{t} \frac{\pi}{\sqrt{1-t^2}} //$$

$$F(t) = \pi \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt = \pi \left(\ln t - \dots \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \sin u \\ dt = \cos u du \\ \int \frac{1}{\sin u} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \cdot \cos u du = \int \frac{du}{\sin u} \end{array} \right.$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{du}{\frac{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2} + \sin^2 \frac{u}{2}}} = \int \frac{du}{\frac{2 \tan \frac{u}{2}}{1 + \tan^2 \frac{u}{2}}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \frac{u}{2} \text{ ile} \\ \text{bölerek} \end{array} \right.$$

$$\tan \frac{u}{2} = v \quad \frac{u}{2} = \text{Arctan } v \quad u = 2 \text{Arctan } v \quad du = \frac{2dv}{1+v^2}$$

$$\int \frac{\frac{2dv}{1+v^2}}{\frac{2v}{1+v^2}} = \ln v = \ln \tan \frac{u}{2} = \ln \tan \left(\frac{1}{2} \text{Arcsin } t \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \text{Arcsin } t \\ \frac{u}{2} = \frac{1}{2} \text{Arcsin } t \end{array} \right.$$

$$= \ln \left(\frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} \right) = \ln \left(\tan \frac{u}{2} \right) = -\ln \left(\cot \frac{u}{2} \right) = -\ln \left(\frac{\cos \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right) = -\ln \left(\frac{2 \cos^2 \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} \right)$$

$$= -\ln \left(\frac{\cos^2 \frac{u}{2} + \cos^2 \frac{u}{2} + \sin^2 \frac{u}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}}{\sin u} \right) = -\ln \left(\frac{1 + \cos u}{\sin u} \right) = -\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t} \right)$$

$$F(t) = \pi \left[\ln t + \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t} \right) \right] = \pi \ln \left(t \cdot \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t} \right) = \pi \ln (1 + \sqrt{1-t^2}) //$$

$$7- F(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \begin{cases} \pi \ln \alpha^2, & |\alpha| > 1 \text{ ise} \\ 0, & |\alpha| < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$F'(\alpha) = \int_0^\pi \frac{-2\cos x + 2\alpha}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} dx = -2 \int_0^\pi \frac{\cos x}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} dx + 2\alpha \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x}$$

$$= -\frac{2x}{-2\alpha} \Big|_0^\pi + 2 \frac{1+\alpha^2}{-2\alpha} - \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} + 2\alpha \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x}$$

$$= \frac{\pi}{\alpha} + \left(2\alpha - \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \right) \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x}$$

$$= \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} = \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 + 2\alpha^2 + \alpha^4 - 4\alpha^2}} (\text{Arctan} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} - \text{Arctan} 0)$$

$$= \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \frac{2}{|1 - \alpha^2|} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \frac{\pi}{|1 - \alpha^2|} = \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{|1 - \alpha^2|} //$$

$$\alpha^2 < 1 \Rightarrow \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\alpha} \frac{\alpha^2 - 1}{1 - \alpha^2} = \frac{\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{\alpha} = 0$$

$$\alpha^2 > 1 \Rightarrow \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\alpha} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\alpha} = F'(\alpha)$$

$$F(\alpha) = 2\pi \ln \alpha = \pi \ln \alpha^2 //$$

$|\alpha| = 1 \Rightarrow$ has olmayan integral olur.

$\Rightarrow \int_0^\pi = \int_0^1 + \int_1^\pi$ alınmalı. Limit varsa yakınsak, yoksa iraksaktır.

Örnek // $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(5-3\cos x)^3} = ?$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{t-\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$F(t) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(t-\cos x)^2} = \frac{\pi t}{(t^2-1)^{3/2}} \text{ idi. Türevi ise ;}$$

$$F'(t) = -2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{(t-\cos x)^3} \quad \left\{ \pi t (t^2-1)^{-3/2} \right\}$$

$$= \pi (t^2-1)^{-3/2} - 3t^2 \pi (t^2-1)^{-5/2} \text{ olur.}$$

işinin türevi

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(t-\cos x)^3} = \frac{3}{2} t^2 \frac{\pi}{\sqrt{(t^2-1)^5}} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(t^2-1)^3}}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(5-3\cos x)^3} = \frac{1}{27} \int_0^{\pi} \frac{dx}{\left(\frac{5}{3}-\cos x\right)^3} = \frac{1}{27} \left\{ \frac{3}{2} \cdot \frac{25}{9} \cdot \frac{\pi}{\left(\frac{16}{9}\right)^{5/2}} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\left(\frac{16}{9}\right)^{3/2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{27} \left\{ \frac{25}{6} \cdot \frac{\pi}{\left(\frac{4}{3}\right)^5} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^3} \right\} = \frac{59\pi}{2048} //$$

- IV. BÖLÜM -

4.1. İki Katlı İntegraller

$F(x,y)$ fonksiyonu,

xy -düzleminin bir R bölgesinde tanımlanmış olsun. R bölgesinin alanı ΔA_k olan $k=1,2,\dots,n$ ΔR_k alt bölgelerine bölelim.

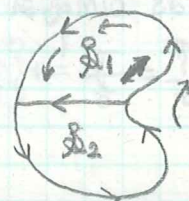
R nin alt bölgesi olan ΔR_k nin herhangi bir noktası (ξ_k, η_k) olsun.

$$\sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k) \Delta A_k \quad \text{---- (4.1.1)}$$

toplamını oluşturalım. Bölme sayısı sınırsız olarak arttığı ve ΔR_k 'nin en büyük doğrusal boyutu sıfıra yaklaştığı zaman (4.1.1) toplamının bir limiti varsa, bu limite $F(x,y)$ fonksiyonunun R bölgesi üzerinde iki katlı integrali denir ve,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k) \Delta A_k = \iint_R F(x,y) dA = \iint_R F(x,y) dx dy \quad \text{yazılır.}$$

Eğer R bölgesinin çevresi y eksenine (eksenlere) paralel doğruları en çok iki noktada kesiyorsa, R yi çevreleyen ACB ve ADB eğrilerinin denklemleri sırasıyla ;



aynı yönde
integral
alınır.

$y=f_1(x)$ ve $y=f_2(x)$ $a \leq x \leq b$ fonksiyonları iseler ve ΔA_k alanı da,

$\Delta x_k \cdot \Delta y_k$ olduğundan limit durumunda $dA = dx \cdot dy$ olur ve

$$\left. \begin{aligned} \iint_R F(x,y) dx dy &= \int_{x=a}^b \left\{ \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y) dy \right\} dx \\ \iint_R F(x,y) dy dx &= \int_{y=c}^d \left\{ \int_{x=\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} F(x,y) dx \right\} dy \end{aligned} \right\} \text{ yazılabilir.}$$

örnek // R bölgesi $y=x^2$, $x=1$, $x=2$ ve $y=1$ doğruları ile sınırlanan bölge olduğuna göre, $\int_{x=1}^2 \left\{ \int_{y=1}^{x^2} (x^2 y^2) dy \right\} dx$ integralini hesaplayınız.

Gözüm // 1. YOL // $\int_{x=1}^2 \left\{ x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_1^{x^2} \right\} dx = \int_{x=1}^2 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} - \frac{1}{3} \right) dx$

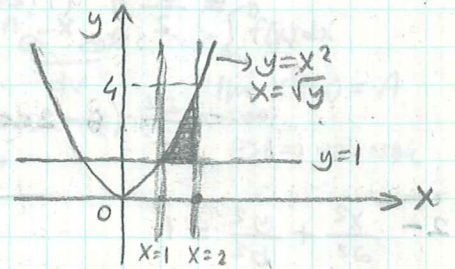
$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} \Big|_1^2 = \frac{32}{5} + \frac{128}{21} - \frac{8}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} + \frac{1}{3} = \frac{1006}{105} //$$

2. YOL // $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$

$$= \int_{y=1}^4 \left\{ \int_{x=\sqrt{y}}^2 (x^2 + y^2) dx \right\} dy$$

$$= \int_{y=1}^4 \left(\frac{x^3}{3} + x y^2 \Big|_{\sqrt{y}}^2 \right) dy = \int_{y=1}^4 \left(\frac{8}{3} + 2y^2 - \frac{y^{3/2}}{3} - y^{5/2} \right) dy$$

$$= \frac{8}{3} y + \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{15} y^{5/2} - \frac{2}{7} y^{7/2} \Big|_1^4 = \frac{32}{3} + \frac{128}{3} - \frac{64}{15} - \frac{256}{7} - \frac{8}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{7} = \frac{1006}{105} //$$



$\iint_R F(x,y) dx dy$ integralinde eğer $F(x,y)=1$ ise $\iint_R dx dy$ integrali R bölgesinin alanını verir.

Sorular

1- $R = \{(x,y) \mid x=2, y \geq 0, y-x+1 \leq 0\}$ olduğuna göre $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy = ?$

2- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin alanını bulunuz.

3- $\rho = a \sin \theta$, $\rho = a(1 + \sin \theta)$ $\theta=0$ ve $\theta=\pi$ efrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

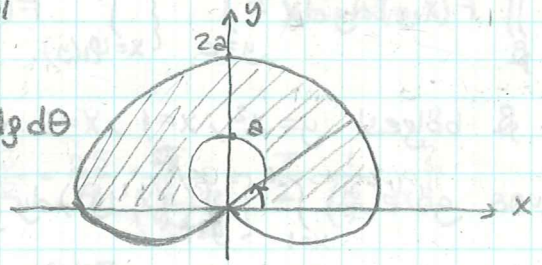
★ $\iint_{\mathcal{R}} F(x,y) dx dy$ integralinde $x=g(u,v)$ $y=h(u,v)$ değişimi yapılırsa,

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x,y) dx dy = \iint_{\mathcal{R}'} F(g(u,v), h(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv \text{ olur.}$$

İspatı reel analizde yapılacaktır.

3- $\rho = a \sin \theta$ $\rho = a(1 + \sin \theta)$ $\theta=0, \theta=\pi$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} F(x,y) dx dy &= \iint_{\mathcal{R}'} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho, \theta)} \right| d\rho d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=a \sin \theta}^{a(1+\sin \theta)} \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \end{aligned}$$

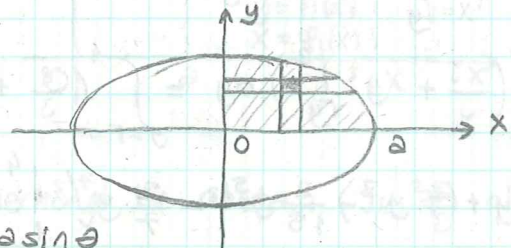


$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta & \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho, \theta)} &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \\ y &= \rho \sin \theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{2} (\theta - 2 \cos \theta) \Big|_0^{\pi} = \frac{a^2}{2} \left[(\pi - 2 \cos \pi) - (0 - 2 \cos 0) \right] = \frac{a^2}{2} (\pi + 4)$$

2- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\begin{aligned} \frac{A}{4} &= \int_{x=0}^a \left\{ \int_{y=0}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy \right\} dx \\ &= \frac{b}{2} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= a \sin \theta \\ dx &= a \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

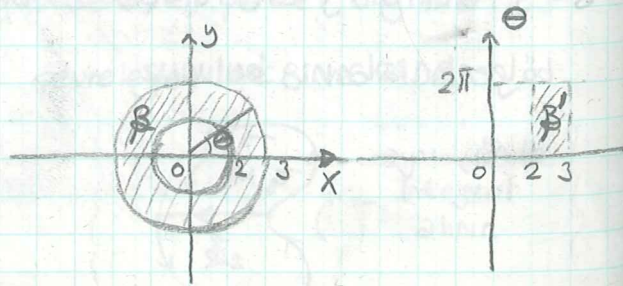
$$= \frac{b}{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} ab \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{ab}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{4} \pi \Rightarrow A = \pi ab //$$

Soru,, $\mathcal{R}$ bölgesi xy - düzleminde $x^2 + y^2 = 4$ çemberi ile $x^2 + y^2 = 9$ çemberi arasında kalan bölge olduğuna göre $\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = ?$

Çözüm,, $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$ değişimi yaparsak,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_{\rho=2}^3 \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho, \theta)} \right| d\rho d\theta \end{aligned}$$



$$= \int_0^{2\pi} \int_{\varphi=2}^3 \varphi^2 d\varphi d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \varphi^3 d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} 19 d\theta = \frac{19}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{38\pi}{3} //$$

4.2. Gamma ve Beta Fonksiyonları

TANIM 4.2.1.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad \dots (4.2.1)$$

bağıntısı ile tanımlanan ve $\Gamma(n)$ simgesiyle gösterilen fonksiyona Gamma Fonksiyonu denir.

Teorem 4.2.1.

a - $n > 0$ olmak üzere $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$ ---- (4.2.2)

b - $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\Gamma(n+1) = n!$ ---- (4.2.3).

dir.

ispat// a - Tanımdan $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^{n+1-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \underbrace{x^n}_{u} \underbrace{e^{-x}}_{dv} dx$

$$= -\frac{x^n e^{-x}}{0} \Big|_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} \underbrace{x^{n-1} e^{-x}}_{\Gamma(n)} dx = n \Gamma(n) //$$

$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f(x) dx \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = A \\ p > 1 \Rightarrow \text{yakınsak} \end{array} \right.$

b - $n \in \mathbb{N}^+$, $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$ idi.

Tanımdan $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{e^x} \Big|_0^{\infty} = -(0-1) = 1$

$n=1$ için $\Gamma(2) = 1 \Gamma(1) = 1 = 1!$

$n=2$ için $\Gamma(3) = 2 \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$

$n=3$ için $\Gamma(4) = 3 \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

⋮

$n=n+1$ için, $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n!$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du \Rightarrow \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

$$\Rightarrow \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

$x \rightarrow 0^+$, $\Gamma(x) \cong \frac{1}{x}$ olur. //

★ $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ dir. Gösterelim.

ispat// Tanımdan, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ olur.

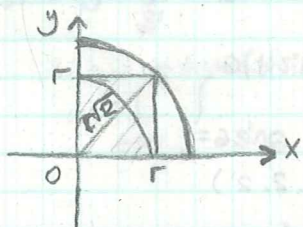
önce $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ integralinin ne olduğunu görelim.

Daha önce bu integralin yakınsak olup olmadığına bakmamız gerekir.

$\int_0^{\infty} f(x) dx$ integrali için $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = A$ sonlu, $p > 1 \Rightarrow$ yakınsak
 $A \neq 0, p \leq 1 \Rightarrow$ ıraksak

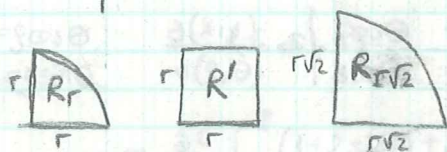
$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ iki defa türev alırsak sonlu sayı çıkar. I.S.D. MÜHÜR

$$\left. \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-x^2} dx \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-y^2} dy \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_0^r \int_0^r e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (\text{şarparak}) \quad \left\{ \begin{aligned} I_r &= \int_0^r e^{-x^2} dx \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-x^2} dx &= I \end{aligned} \right\}$$



$$\iint_{R_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{R'} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{R_{r\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

olur.



$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ değişken değiştirme yapalım.

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^r e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta \leq \iint_{R'} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta \leq \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{r\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta$$

fonk. det.

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \{e^{-\rho^2}\}_0^r d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (e^{-r^2} - 1) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2})$$

$\left\{ \begin{aligned} dx dy &= \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} \right| = \rho \end{aligned} \right\}$

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2}) \leq I_r^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2r^2})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2}) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} I_r^2 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2r^2})$$

$$\frac{\pi}{4} \leq I^2 \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} //$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \quad x = u^2 \text{ değişimi yapalım.}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} 2u du}{u} = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \text{ bulunur.}$$

$$\star \boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}} \quad \text{--- (4.2.4) //}$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \text{ idi. } \Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi} \text{ tanımlı olur.}$$

$$\Gamma(-\frac{5}{2}) = ? \quad \Gamma(-\frac{5}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{5}{2}+1)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2})}{-\frac{5}{2}} = \frac{\frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+1)}{-\frac{3}{2}}}{-\frac{5}{2}} = \frac{-\frac{2}{3}(-2\sqrt{\pi})}{-\frac{5}{2}}$$

$$\Gamma(-\frac{5}{2}) = -\frac{8\sqrt{\pi}}{15} \quad \text{---- (4.2.5)}$$

$$1- \frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = ? \quad 2- \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)} = ? \quad 3- \frac{\Gamma(3) \cdot \Gamma(5/2)}{\Gamma(11/2)} = ? \quad 4- \frac{6\Gamma(8/3)}{5\Gamma(2/3)}$$

$\Gamma(n)$ n nin çok büyük değerleri için $0 < \theta < 1$ olmak üzere

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{n(n+1)}} \quad \text{---- (4.2.6)}$$

esitliğinden yararlanılır. Eğer $n \in \mathbb{N}^+$ ise,

$$\Gamma(n+1) \cong \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \quad \text{---- (4.2.7)}$$

yazılabilir.

$n \in \mathbb{N}^+$ ise $\Gamma(n+1) = n!$ idi. (4.2.7) ifadesine Stirling yaklaşık faktöriyeli, ya da $n!$ için asimptotik formülü denir.

$$1- \frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = \frac{5!}{2 \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 60$$

$$2- \frac{3/2 \Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{3/4 (\Gamma(1/2))}{\Gamma(1/2)} = 3/4$$

$$3- \frac{2\Gamma(5/2)}{\Gamma(11/2)} = \frac{3\Gamma(3/2)}{\Gamma(11/2)} = \frac{3\Gamma(3/2)}{7/2 \cdot 5/2 \cdot 3/2 \cdot 1/2 \Gamma(1/2)} = 3 \cdot \frac{8}{63 \cdot 5} = \frac{8}{21 \cdot 5} = \frac{8}{105} \quad \text{--- P.D.D. MUKAMAT}$$

$$4- \frac{6\Gamma(8/3)}{5\Gamma(2/3)} = \frac{6 \cdot \frac{5}{3} \Gamma(5/3)}{5 \Gamma(2/3)} = \frac{10 \cdot \frac{2}{3} \Gamma(2/3)}{5 \Gamma(2/3)} = \frac{4}{3}$$

4.3. Gamma Fonksiyonunu Kapsayan Çeşitli Sonuçlar

$$0 < x < 1 \text{ olmak üzere, } \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \cdot \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{v^2}\right) \quad \text{---- (4.3.1)}$$

$$\sin(\pi x) = \pi \cdot x \cdot \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{v^2}\right) \quad \text{---- (4.3.2.)}$$

$$\star \quad \boxed{\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}} \quad \text{---- (4.3.3.)}$$

$x = \frac{1}{2}$ konursa, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olduğu yine buradan bulunur.

$$2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma(x+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \Gamma(2x) \quad \text{---- (4.3.4.)}$$

esitliğine Gamma fonksiyonu için katlama formülü denir.

Katılma formülünün genel şekli:

$$\Gamma(x) \Gamma(x + \frac{1}{m}) \Gamma(x + \frac{2}{m}) \dots \Gamma(x + \frac{m-1}{m}) = m^{\frac{1}{2} - mx} (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(mx) \dots (4.3.5) \text{ dir.}$$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{ax} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{m}\right) e^{-\frac{x}{m}} \right\} \dots (4.3.6)$$

gösterimi, Gamma fonksiyonunun sonsuz serpiş gösterimidir.

$$\Gamma(x+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}{(x+1)(x+2) \dots (x+k)} k^x = \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi(x, k) \dots (4.3.7.)$$

esitliğindeki $\Pi(x, k)$ fonksiyonuna Gauss Π fonksiyonu denir.

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \left\{ 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{30(12x)^3} + \dots \right\} \dots (4.3.8.)$$

esitliğine Gamma fonksiyonu için Stirling Asimptotik Serisi denir.

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma \quad (\text{Euler Sabiti}) \dots (4.3.9.)$$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right) + \dots \dots (4.3.10.)$$

(rasyonel olup olmadığı bilinmemektedir.)

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \text{ 'i kullanacağız.}$$

4.4. Beta Fonksiyonu

TANIM 4.4.1.

$B(m, n)$ simgesiyle gösterilen ve

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \dots (4.4.1)$$

bağıntısıyla tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir.

$0 < m < 1, 0 < n < 1$ ise yakınsaktır.

① $m \leq 0$ ise; ① n'ye bağlı olmaksızın yakınsaktır.

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \int_0^{1/2} x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

② $n \leq 0$ ise;

② m'ye bağlı olmaksızın yakınsaktır.

Teorem 4.4.1.

i- $B(m, n) = B(n, m)$

ii- $B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cdot \cos^{2n-1} \theta \cdot d\theta$

dir.

611
ispat // i - $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ integralinde $x=1-u$ değişimini yapalım.

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \int_1^0 (1-u)^{m-1} u^{n-1} (-du) = - \int_1^0 u^{n-1} (1-u)^{m-1} du \\ = \int_0^1 u^{n-1} (1-u)^{m-1} du = B(n, m) //$$

ii - $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ integralinde $x = \sin^2 \theta$ değişimini yapalım.

$$dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (\sin^2 \theta)^{m-1} (\cos^2 \theta)^{n-1} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cdot \cos^{2n-1} \theta d\theta //$$

Teorem 4.4.2. $m, n > 0$ olmak üzere;

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

dir.

ispat // $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ idi. $\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx$ olur.

Burada $x=u^2$ değişimini yapalım. ikincisi için $x=v^2$ değişimini yapalım.

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty u^{2m-2} e^{-u^2} 2u du$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty v^{2n-2} e^{-v^2} 2v dv$$

x

$$\Gamma(m) \cdot \Gamma(n) = \left(2 \int_0^\infty u^{2m-2} e^{-u^2} u du \right) \left(2 \int_0^\infty v^{2n-2} e^{-v^2} v dv \right) \\ = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty u^{2m-1} v^{2n-1} e^{-(u^2+v^2)} du \cdot dv$$

integralinde, tekrar $u = \rho \cos \theta$ $v = \rho \sin \theta$ değişimini yapalım.

$$= 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^\infty \rho^{2m+2n-2} e^{-\rho^2} \sin^{2n-1} \theta \cdot \cos^{2m-1} \theta \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \quad \left\{ du \cdot dv = \rho d\rho d\theta \right.$$

$$= \left(2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} \theta \cos^{2m-1} \theta d\theta \right) \left(\int_0^\infty \rho^{2(m+n-1)} e^{-\rho^2} 2\rho d\rho \right) \\ B(n, m) = B(m, n) \quad \Gamma(m+n) \quad \left\{ \rho^2 = z \text{ diyelim.} \right.$$

$\Rightarrow \Gamma(m) \cdot \Gamma(n) = B(m, n) \cdot \Gamma(m+n)$ olur. Buradan da,

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4.4.1 // $\int_0^1 x^4(1-x)^3 dx = ?$

$$B(5,4) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)} = \frac{4!3!}{8!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{280} //$$

Örnek 4.4.2 // $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}} = ?$

$x=2u$ değişimini yapalım.

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \frac{4u^2 \cdot 2 du}{\sqrt{2(1-u)}} = 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} du = 4\sqrt{2} \int_0^1 u^2(1-u)^{-1/2} du = 4\sqrt{2} B(3, \frac{1}{2}) \\ &= 4\sqrt{2} \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3+\frac{1}{2})} = 4\sqrt{2} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{24\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{24 \cdot 8\sqrt{2}}{185} = \frac{64\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

Örnek 4.4.3 // $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta = ?$

$$B(m,n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} 2m-1 &= 6 \Rightarrow m = 7/2 \\ 2n-1 &= 0 \Rightarrow n = 1/2 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta = \frac{\Gamma(\frac{7}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{7}{2} + \frac{1}{2})} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2}{2\Gamma(4)} = \frac{15/8 \cdot \pi}{2 \cdot 3!} = \frac{7 \cdot \pi}{8 \cdot 12} = \frac{5\pi}{32} //$$

Alıştırmalar

1- Aşağıdaki integraleri hesap ediniz.

a- $\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y^3} dy$ b- $\int_0^\infty e^{-x^3} dx$ c- $\int_0^\infty 3^{-4x^2} dx$ d- $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx$

e- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$ f- $\int_0^1 (\ln x)^4 dx$ g- $\int_0^1 (x \ln x)^3 dx$

2- m, n, a pozitif sabitler olmak üzere $\int_0^\infty x^m e^{-ax^n} dx$ integralini hesaplayınız.

3- $n \in \mathbb{N}^+$, $-1 < m$ olmak üzere $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ olduğunu gösteriniz.

4- $\Gamma(n) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx$, $n > 0$, olduğunu gösteriniz.

5- $n \in \mathbb{N}$ nin büyük değerleri için $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ olduğunu gösteriniz.

6- $\int_0^2 y^4 \sqrt{a^2 - y^2} dy$ integralini hesaplayınız.

7- $\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^5 \theta d\theta$ " " "

8- $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ $0 < p < 1 \Rightarrow \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ dir. Gösteriniz.

9- $\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$ integralini hesaplayınız.

10- $\int_0^2 x \sqrt{8-x^3} dx$ " " "

Çözümler

$$1-a-y^3=u \Rightarrow 3y^2 dy = du$$

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$y^2 = u^{2/3} \Rightarrow dy = \frac{1}{3} u^{-1/3} du$$

$$\left. \begin{aligned} y &= u^{1/3} \Rightarrow y^{1/2} = u^{1/6} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^{1/2} e^{-y^3} dy &= \int_0^{\infty} u^{1/6} e^{-u} \frac{1}{3} u^{-2/3} du \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-u} du = \frac{\sqrt{\pi}}{3} // \end{aligned}$$

$$b- x^3=u \quad \int_0^{\infty} e^{-x^3} dx = \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{3} u^{-2/3} du = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \text{ bulunmalıdır.} //$$

$$c- \int_0^{\infty} 3^{-4x^2} dx \quad e^{\ln a} = a \text{ dir.}$$

$$= \int_0^{\infty} (e^{\ln 3})^{-4x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-4x^2 \ln 3} dx$$

$$\left\{ \begin{aligned} 4x^2 \ln 3 &= u \\ \text{sinirler de\u0131i\u0131er.} \end{aligned} \right.$$

$$x = \frac{u^{1/2}}{2\sqrt{\ln 3}}$$

$$dx = \frac{\frac{1}{2} u^{-1/2} du}{2\sqrt{\ln 3}} = \frac{1}{4} \frac{u^{-1/2}}{\sqrt{\ln 3}} du$$

$$e- \int_0^{\infty} \frac{1 dx}{\sqrt{-\ln x}} \quad -\ln x = u \text{ diyelim.}$$

$$x = e^{-u} \text{ olur. } dx = -e^{-u} du$$

$$\int_0^{\infty} \frac{-e^{-u} du}{\sqrt{u}} = \int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$f- \int_0^1 (\ln x)^4 dx \quad \ln x = -u \quad x = e^{-u} \quad dx = -e^{-u} du$$

$$= - \int_0^1 u^4 e^{-u} du = \int_0^{\infty} u^4 e^{-u} du = \Gamma(5) = 4! = 24.$$

$$g- \int_0^1 (x \ln x)^3 dx \quad \ln x = -u \quad x = e^{-u} \quad dx = -e^{-u} du$$

$$= \int_0^1 (e^{-u}(-u))^3 - e^{-u} du = \int_0^{\infty} e^{-4u} u^3 du, \quad 4u = -v \quad 4du = -dv, \quad -\frac{1}{40} \int_0^{\infty} e^{-v} v^3 dv = -\frac{3}{32} //$$

$$2- \int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx \quad a > 0$$

$$ax^n = u \text{ de\u0131i\u0131imini yapalım. } a n x^{n-1} dx = du \quad dx = \frac{1}{an} x^{1-n} du$$

$$x = \left(\frac{u}{a}\right)^{1/n} \text{ olur. } x^{1-n} = \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{1-n}{n}}$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{a}\right)^{m/n} e^{-u} \left(\frac{1}{an} x^{1-n}\right) du$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{a}\right)^{m/n} e^{-u} \frac{1}{an} \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{1-n}{n}} du = \frac{1}{a^{m/n} \cdot a \cdot n \cdot a^{\frac{1-n}{n}}} \int_0^{\infty} u^{m/n + \frac{1-n}{n}} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{a^{\frac{m+1}{n}}} \int_0^{\infty} u^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-u} du = \frac{1}{n} \frac{1}{a^{\frac{m+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) //$$

3- $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx$ $\ln x = -u$ değişimini yapalım.

$x = e^{-u}$ $dx = -e^{-u} du$ olur.

$$\int_0^1 e^{-mu} (-u)^n (-e^{-u}) du = (-1)^n \int_0^\infty u^n e^{-mu-u} du$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty u^n e^{-(m+1)u} du$$

$(m+1)u = z$ dersek $u = \frac{z}{m+1}$ $du = \frac{dz}{m+1}$

$$= (-1)^n \int_0^\infty \left(\frac{z}{m+1}\right)^n e^{-z} \frac{dz}{m+1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty z^n e^{-z} dz = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \Gamma(n+1) \quad \left\{ n \in \mathbb{N} \text{ ise } \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} n! \text{ olur.} \right\}$$

4- $\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{n-1} dx$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = u$ değişimini yapalım.

$\frac{1}{x} = e^u$ $x = e^{-u}$ $dx = -e^{-u} du$

$$= \int_0^\infty u^{n-1} (-e^{-u}) du = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du = \Gamma(n)$$

5- $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$

$e^{\ln a} = a$, $e^{\ln x} = x$

$$= \int_0^\infty (e^{\ln x})^n e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{n \ln x - x} dx$$

$x = n+y$ değişimini yapalım.

$$= \int_{-n}^\infty e^{n \ln(n+y) - y - n} dy$$

$dx = dy$ $e^{n \ln(n+y)} \cdot e^{-y} e^{-n}$

$\ln(n+y) = \ln\left[\left(1 + \frac{y}{n}\right)n\right]$

$$= -e^{-n} \int_{-n}^\infty e^{n \ln\left[n\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right] - y} dy$$

$$= -e^{-n} \int_{-n}^\infty e^{n \ln n + n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) - y} dy = -e^{-n} \int_{-n}^\infty e^{n \ln n} \cdot e^{n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) - y} dy$$

$$= e^{-n} n^n \int_{-n}^\infty e^{n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) - y} dy \rightarrow \text{McLaurin serisine eşelim.}$$

$$\ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) = 0 + \frac{y}{n} - \frac{y^2}{2n^2} + \frac{y^3}{3!n^3} + \dots$$

$$f'(y) = \frac{1/n}{1+y/n} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^{-1} \quad f''(y) = -\frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^{-2} \quad f'''(y) = 2 \frac{1}{n^3} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^{-3}$$

$$= e^{-n} n^n \int_{-n}^\infty e^{-\frac{y^2}{2n} + \frac{y^3}{3n^2} + \dots} dy$$

$\frac{y}{n} = z$ diyelim. $y = n z$

$$= \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3n^{1/3}}} n^{1/2} dz \approx \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} n^{1/2} dz$$

$$e^{-\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3n^{1/3}}} + \dots$$

$$e^{-\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3n^{1/3}}} + \dots$$

$$= e^{-n} n^{1/2} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3n^{1/3}}} n^{1/2} dz$$

$$= e^{-n} n^{1/2} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-u^2} \sqrt{2} du$$

$$= 2e^{-n} n^{1/2} \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= 2e^{-n} n^{1/2} \sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^{-n} n^{1/2} \sqrt{2\pi n} \cong n! = \Gamma(n+1) //$$

6- $\int_0^a y^4 \sqrt{a^2 - y^2} dy = ?$ $y = a\sqrt{u}$ dersek $y^4 = a^4 u^2$

$$= \int_0^1 a^4 u^2 a(1-u)^{1/2} \frac{a}{2\sqrt{u}} du$$

$$= \frac{1}{2} a^6 \int_0^1 u^{3/2} (1-u)^{1/2} du = \frac{1}{2} a^6 B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = a^6 \frac{\Gamma(5/2) \Gamma(3/2)}{2 \Gamma(4)}$$

$$= a^6 \frac{\frac{3}{2} \Gamma(1/2) \frac{1}{2} \Gamma(1/2)}{3! \cdot 2 \cdot 2} = \frac{a^2 \pi}{32} //$$

7- $\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^5 \theta d\theta ;$

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta$$

$$\begin{cases} 2n-1=4, n=5/2 \\ 2m-1=5, m=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} B\left(3, \frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma(3) \Gamma(5/2)}{2 \Gamma(11/2)} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(1/2)}{2 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(1/2)} = \frac{8}{315} //$$

8- $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx ;$ $\frac{x}{1+x} = u, x = u + ux$

$$x = \frac{u}{1-u} \quad dx = \frac{(1-u + u) du}{(1-u)^2} = \frac{du}{(1-u)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{u^{p-1}}{1 + \frac{u}{1-u}} \cdot \frac{1}{(1-u)^2} du$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{u}{1-u}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{1-u} du = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{-p} du = B(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(1-p)}{\Gamma(1)}$$

$$= \Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p \pi}$$

9- $\int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^4}$ $y^4 = u$ değişimini yapalım. $y = u^{1/4}$ $dy = \frac{1}{4} u^{-3/4} du$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1/4 u^{-3/4} du}{1+u} = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{u^{-3/4}}{1+u} du = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} \quad \begin{cases} p-1 = -3/4 \\ p = 1/4 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\pi}{1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} //$$

10- $\int_0^2 x \sqrt[3]{8-x^3} dx$; $x^3 = 8u$ diyelim. $x = 2\sqrt[3]{u} = 2u^{1/3}$ olur.

$$dx = \frac{2}{3} u^{-2/3} du \text{ dur.}$$

$$= \int_0^1 2u^{1/3} \cdot 2(1-u)^{1/3} \cdot \frac{2}{3} u^{-2/3} du = \frac{8}{3} \int_0^1 u^{-1/3} (1-u)^{1/3} du$$

$$= \frac{8}{3} B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(2)} = \frac{8}{3} \Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3}+1) = \frac{8}{3} \Gamma(\frac{2}{3}) \frac{1}{3} \Gamma(\frac{1}{3})$$

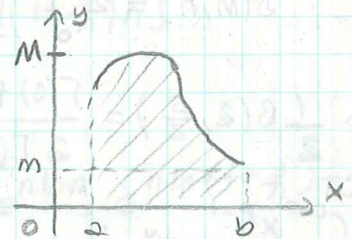
$$= \frac{8}{9} \Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(1-\frac{1}{3}) = \frac{8}{9} \frac{\pi}{\sin \pi/3} = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$

SORULAR

1- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n)$ limitinin mevcut olup olmadığını araştırınız.

2- $\frac{d}{dn} \Gamma(n) = \Gamma'(n)$ olduğuna göre $\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx$ olduğunu gösteriniz.

$a \leq x \leq b$ $m \leq f(x) \leq M$ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ idi.
İntegraller için ortalama değer teoremleri.



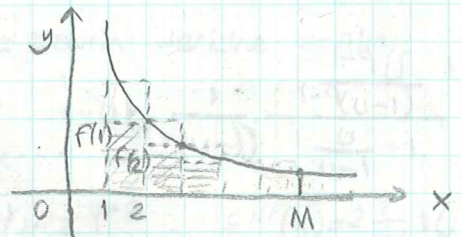
Çözüm 1// $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunu alalım.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{M-1} + \frac{1}{M} \leq \int_1^M \frac{dx}{x} \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{M-1}$$

$M = n$ alalım.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \dots \textcircled{1}$$



ilk iki tarafa 1 ekleyelim.

617

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \ln n + 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \leq 1 \dots \textcircled{2}$$

① ve ② den $\frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \leq 1$ yazılabilir.

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ dizisini alalım. $n \rightarrow \infty$ için 0 ile 1 arasında sınırlı dizedir. Artan ise yukardan sınırlı ve yakınsak, azalan ise aşağıdan sınırlı ve yakınsaktır.

$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ eşitsizliğinin integralini $(n, n+1)$ aralığında alalım.

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \text{ olur.}$$

$$S_{n+1} - S_n = \ln n - \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \\ S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \end{array} \right.$$
$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0 \quad \text{monoton azalardır.}$$

Monoton azalan dizi aşağıdan sınırlıdır. 0 ile sınırlıdır. Yakınsaktır.

0 halde limiti vardır. //

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma \quad (\text{Euler sabiti})$$